姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考生座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

第五届中国大学生数学竞赛预赛试卷

(数学类, 2013年10月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	10	15	15	20	25	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 平面 $\mathbb{R}^2$ 上两个半径为 r 的圆 C_1 和 C_2 外切于 P 点. 将圆 C_2 沿 C_1 的圆周（无滑动）滚动一周，这时, C_2 上的 P 点也随 C_2 的运动而运动. 记 Γ 为 P 点的运动轨迹曲线, 称为心脏线. 现设 C 为以P 的初始位置 (切点) 为圆心的圆, 其半径为 R. 记 $\gamma:\mathbb{R}^2\cup\{\infty\}\to\mathbb{R}^2\cup\{\infty\}$ 为圆 C 的反演变换，它将 $Q\in\mathbb{R}^2\backslash\{P\}$ 映成射线 PQ 上的点 Q', 满足 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PQ'}=R^2$. 求证：$\gamma(\Gamma)$ 为抛物线.

得分	
评阅人	

二、 (本题 10 分) 设 n 阶方阵 $B(t)$ 和 $n\times 1$ 矩阵 $b(t)$ 分别为 $B(t)=(b_{ij}(t))$ 和 $b(t)=\begin{pmatrix} b_1(t)\\ \vdots \\ b_n(t)\end{pmatrix}$, 其中 $b_{ij}(t)$, $b_i(t)$ 均为关于 t 的实系数多项式, $i,j=1,2,\cdots,n$. 记 $d(t)$ 为 $B(t)$ 的行列式, $d_i(t)$ 为用 $b(t)$ 替代 $B(t)$ 的第 i 列后所得的 n 阶矩阵的行列式. 若 $d(t)$ 有实根 t_0 使得 $B(t_0)X=b(t_0)$ 成为关于 X 的相容线性方程组, 试证明: $d(t),d_1(t),\cdots,d_n(t)$ 必有次数 $\geqslant 1$ 的公因式.

专业:______ 考生座位号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上有二阶连续导数, $f'(0)=1$, $f''(0)\neq 0$, 且 $0<f(x)<x$, $x\in(0,a)$. 令

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad x_1\in(0,a).$$

(1) 求证 $\{x_n\}$ 收敛并求极限; (2) 试问 $\{nx_n\}$ 是否收敛? 若不收敛, 则说明理由. 若收敛, 则求其极限.

得分	
评阅人	

四、 (本题 15 分) 设 $a > 1$, 函数 $f:\ (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ 可微. 求证存在趋于无穷的正数列 $\{x_n\}$ 使得

$$f'(x_n) < f(ax_n),\ n = 1, 2, \cdots .$$

专业:______ 考生座位号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、(本题 20 分) 设 $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ 为偶函数, f 在 $[0,1]$ 上单调递增, 又设 g 是 $[-1,1]$ 上的凸函数, 即对任意 $x,y\in[-1,1]$ 及 $t\in(0,1)$ 有

$$g(tx+(1-t)y)\leqslant tg(x)+(1-t)g(y).$$

求证:
$$2\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx \geqslant \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \int_{-1}^{1} g(x)\,dx.$$

得分	
评阅人	

六、(本题 25 分) 设 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 为 n 阶实方阵全体, E_{ij} 为 (i,j) 位置元素为 1 其余位置元素为 0 的 n 阶方阵, $i,j=1,2,\cdots,n$. 让 Γ_r 为秩等于 r 的实 n 阶方阵全体, $r=0,1,2,\cdots,n$, 并让 $\phi:\ \mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 为可乘映照, 即满足: $\phi(AB)=\phi(A)\phi(B), \forall\ A,B\in\mathbb{R}^{n\times n}$. 试证明:

(1) $\forall\ A,B\in\Gamma_r$, 秩$\phi(A)=$秩$\phi(B)$.

(2) 若 $\phi(0)=0$, 且存在某个秩为 1 的矩阵 W 使得 $\phi(W)\neq 0$, 则必存在可逆方阵 R 使得 $\phi(E_{ij})=RE_{ij}R^{-1}$ 对一切 E_{ij} 皆成立, $i,j=1,2,\cdots,n$.