

第五届中国大学生数学竞赛决赛三、四年级试卷
(数学类, 2014年3月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四			总分
满分	15	15	20	20	15	15	100
得分							

- 注意: 1. 前 4 题是必答题, 再从 5-11 题中任选两题, 题号要填如上面的表中.
 2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
 3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
 4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 设 S 为 \mathbb{R}^3 中的抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $P = (a, b, c)$ 为 S 外一固定点, 满足 $a^2 + b^2 > 2c$. 过 P 作 S 的所有切线. 证明: 这些切线的切点落在同一张平面上.

专业: _____

考生座位号: _____

所在院校: _____

准考证号: _____

姓名: _____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设实二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x^T A x$, 其中

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & a_0 & 2 & -2 \\ a & 0 & b & c \\ d & e & 0 & f \\ g & h & k & 4 \end{pmatrix},$$

$a_0, a, b, c, d, e, f, g, h, k$ 皆为实数. 已知 $\lambda_1 = 2$ 是 A 的一个几何重数为 3 的特征值. 试回答以下问题:

- (i) A 能否相似于对角矩阵; 若能, 请给出证明; 若不能, 请给出例子.
- (ii) 当 $a_0 = 2$ 时, 试求 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 在正交变换下的标准型.

姓名: _____ 准考证号: _____ 所在院校: _____ 考生座位号: _____ 专业: _____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、(本题 20 分) 设 $f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上非负可导函数, $f(0) = 0, f'(x) \leq \frac{1}{2}$. 假设 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. 求证: 对任意 $\alpha > 1, \int_0^{+\infty} f^\alpha(x) dx$ 也收敛, 并且

$$\int_0^{+\infty} f^\alpha(x) dx \leq \left(\int_0^{+\infty} f(x) dx \right)^\beta, \quad \beta = \frac{\alpha + 1}{2}.$$

得分	
评阅人	

四、(本题 20 分) 对多项式 $f(x)$, 记 $d(f)$ 为其最大和最小实根之间的距离. 设 $n \geq 2$ 为自然数. 求最大实数 C , 使得对任意所有根都是实数的 n 次多项式 $f(x)$, 都有 $d(f') \geq Cd(f)$.

姓名: _____ 准考证号: _____ 所在院校: _____ 考生座位号: _____ 专业: _____

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、(常微分方程 15 分) 设 $f(x, y)$ 为 $[a, b] \times \mathbb{R}$ 上关于 y 单调下降的二元函数. 设 $y = y(x)$ 和 $z = z(x)$ 是可微函数, 且满足:

$$y' = f(x, y), \quad z' \leq f(x, z), \quad x \in [a, b].$$

已知 $z(a) \leq y(a)$. 求证: $z(x) \leq y(x), x \in [a, b]$.

得分	
评阅人	

六、(复变函数 15 分) 设 $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 是单位圆盘, 非常数函数 $f(z)$ 在 \overline{D} 上解析, 且当 $|z| = 1$ 时, $|f(z)| = 1$. 求证 $f(D) = D$.

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

七、(实变函数 15 分) 设 $E_k, k = 1, 2, \dots$ 是一列可测集, $f \in L(\cup_{k=1}^{\infty} E_k)$.

1) 令 $A = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k$, 证明 $\int_A f(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\cup_{k=n}^{\infty} E_k} f(x) dm$.

2) 令 $B = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} E_k$, 证明 $\int_B f(x) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\cap_{k=n}^{\infty} E_k} f(x) dm$.

3) 如果 $\{E_k\}$ 是单调的, 求证: $\lim_{k \rightarrow \infty} E_k = E$ 存在, 且有

$$\int_E f(x) dm = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E_k} f(x) dm.$$

得分	
评阅人	

八、(微分几何 15 分) 设 Γ 是三维欧氏空间中一张平面上的一条抛物线, l 是 Γ 的准线. 将 Γ 绕其准线 l 旋转一周, 得到旋转面 S . 求 S 的两个主曲率的比值.

姓名: _____ 准考证号: _____ 所在院校: _____ 考生座位号: _____ 专业: _____

----- ○ ----- ○ ----- 密封线 答题时不要超过此线 ----- ○ -----

得分	
评阅人	

九、(概率统计 15 分) 一只盒子中装有标上 1 至 N 的 N 张票券, 有放回地一张一张地抽取, 若我们想收集 r 张不同的票券, 则要期望抽多少次才能得到它们? 当然假设取得每张票券是等可能的, 各次抽取是独立的.

得分	
评阅人	

十、(抽象代数 15 分) 设群 $G = AB$, 其中 A, B 均为 G 的 Abel 子群, 且 $AB = BA$. $\forall g_1, g_2 \in G$, 用 $[g_1, g_2]$ 表示换位子, 即, $[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$, G' 表示 G 的换位子群 (即由 G 的换位子所生成的子群). 证明:

(a) $\forall a, x \in A, \forall b, y \in B$ 有下式成立:

$$[x^{-1}, y^{-1}][a, b][x^{-1}, y^{-1}]^{-1} = [a, b].$$

(b) G' 为 Abel 群.

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

十一、(数值分析 15 分) 给定多项式序列

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), n = 1, 2, \dots$$

求证: (1) 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

(2) 设 $C[-1, 1]$ 是区间 $[-1, 1]$ 上连续函数构成的内积空间, 其中内积定义为

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

则 $T_n(x)$ 是该内积空间的正交多项式, 即当 $n \neq m$ 时 $\langle T_n(x), T_m(x) \rangle = 0$.

(3) 设 $P(x)$ 是次数为 n 的首项系数为 1 的多项式. 求证:

$$\|P(x)\|_{\infty} \geq \frac{1}{2^{n-1}}$$

且等号成立当且仅当 $P(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$, 这里 $\|P(x)\|_{\infty} = \max_{x \in [-1, 1]} |P(x)|$.