$\{n^k\alpha\}$ 稠密性的初等证明

吴 昊*

（北京大学数学科学学院 2012 级本科生，100871）

中图分类号：O156　　文献标识码：A　　文章编号：1005-6416(2015)12-0019-02

先介绍一个很美妙也很实用的结论（本文称为稠密性定理）：

对于无理数 α，$\{n^k\alpha\}$ $(k=1,2,\cdots)$ 在区间 $(0,1)$ 内稠密.

【注】符号说明：

1. $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数；

2. $\{x\}=x-[x]$.

这里，在区间 $(0,1)$ 内稠密的含义：对于区间 $(0,1)$ 内的任意区间 (s,t)，均存在正整数 n，使得 $\{n^k\alpha\}\in(s,t)$.

由此，进一步得到：

对于区间 $(0,1)$ 内的任意区间 (s,t)，均存在无穷多个正整数 n，使得 $\{n^k\alpha\}\in(s,t)$.

若只有有限多个这样的 n，设其对应的 $\{n^k\alpha\}$ 中最小值为 u，知 $u>s$，则不存在正整数 n，使得 $\{n^k\alpha\}\in(s,u)$，矛盾.

在 2015 年举办的第二届北京大学数学夏令营中，有一道题目是：

证明：$[n^2\alpha]$ $(n=1,2,\cdots)$ 中有无穷多个偶数.

利用稠密性定理，可证明比此题强很多的结论：

对任意正整数 k、m、r $(0\leqslant r<m)$、无理数 α，$[n^k\alpha]$ 中有无穷多个数模 m 余 r.

事实上，由

$$n^k\alpha=m\left[n^k\frac{\alpha}{m}\right]+m\left\{n^k\frac{\alpha}{m}\right\}$$

$$\Rightarrow [n^k\alpha]=m\left[n^k\frac{\alpha}{m}\right]+\left[m\left\{n^k\frac{\alpha}{m}\right\}\right].$$

故 $[n^k\alpha]$ 模 m 余 $r\Leftrightarrow\frac{r}{m}\leqslant\left\{n^k\frac{\alpha}{m}\right\}<\frac{r+1}{m}$.

对正整数 k 和无理数 $\frac{\alpha}{m}$ 使用稠密性定理即证.

稠密性定理常见的证明均使用了很多高等数学的知识. 最近，笔者得到了一个利用范德瓦尔登定理的初等证明.

范德瓦尔登定理　对于任意给定的正整数 N、k，总存在正整数 M，使得把数 $1,2,\cdots,M$ 染成 N 种颜色时，至少存在 k 个组成等差数列的正整数为同一种颜色的.

在证明稠密性定理前，先证明一个引理.

引理　对任意正整数 w、n、k，有

$$n^k=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\mathrm{C}_k^i(w+in)^k.$$

证明　考虑多项式 $f(x)=x^k$ 在 $k+1$ 个点 $w+in$ $(0\leqslant i\leqslant k)$ 处的取值.

收稿日期：2015-08-27

* 本文作者曾获得第 53 届 IMO 金牌.

化简即得对于任意实数 x，有 $f(x)=x$

经验证，$f(x)=x$ 或 $f(x)=2-x$ $(x\in\mathbf{R})$.

消项赋值侧重于对非迭代函数的处理，而迭代消元侧重于对迭代函数的处理. 对于很多函数方程问题，纵是"示形于其外"，亦或是"藏势于其内"，都少不了利用函数定义域和值域进行赋值的方法. 恰当的赋值，是打开思路、解决问题的关键.

参考文献：

[1]　2012 新加坡数学奥林匹克[J]. 娄姗姗　译. 中等数学，2013(增刊二).

[2]　第 56 届 IMO 试题[J]. 中等数学，2015(8).

由拉格朗日插值公式知

$$x^k=\sum_{i=0}^{k}\frac{\prod\limits_{\substack{j\neq i\\0\leqslant j\leqslant k}}(x-(w+jn))}{\prod\limits_{\substack{j\neq i\\0\leqslant j\leqslant k}}((w+in)-(w+jn))}(w+in)^k.$$

比较上式两边 x^k 的系数,注意到,

$$\prod_{\substack{j\neq i\\0\leqslant j\leqslant k}}((w+in)-(w+jn))$$

$$=n^k\cdot i!(-1)^{k-i}\cdot(k-i)!.$$

故 $1=\sum\limits_{i=0}^{k}\frac{1}{(-1)^{k-i}n^k\cdot i!\cdot(k-i)!}(w+in)^k$

$=\frac{1}{n^k\cdot k!}\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\mathrm{C}_k^i(w+in)^k.$

下面回到稠密性定理的证明.

证明 先证明对任意 $\varepsilon\in(0,1)$,存在正整数 n,使得 $\{n^k\alpha\}\in(0,\varepsilon)$.

取正整数 N,使得 $N>\left(\frac{2^k}{\varepsilon}+1\right)^k$.

将所有正整数点 N 染色:对每个正整数 i,存在唯一的颜色 $j(1\leqslant j\leqslant N)$,使得 $\{i^k\alpha\}\in\left[\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}\right)$,将 i 染成颜色 j.

由范德瓦尔登定理,知存在长为 $k+1$ 的同色等差数列,设为 $w+in(0\leqslant i\leqslant k)$,其中,$w$、$n$ 为正整数.

则 $\frac{1}{k!}\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\mathrm{C}_k^i\{(w+in)^k\alpha\}$

$=\frac{1}{k!}\sum\limits_{i=0}^{k-1}((-1)^{k-i}\mathrm{C}_{k-1}^i\cdot$

$(\{(w+in)^k\alpha\}-\{(w+(i+1)n)^k\alpha\}))$.

将此数记为 A.

对任意的 $i(0\leqslant i\leqslant k-1)$,由 $w+in$ 与 $w+(i+1)n$ 同色,知

$$\{(w+in)^k\alpha\}-\{(w+(i+1)n)^k\alpha\}\in\left(-\frac{1}{N},\frac{1}{N}\right).$$

故 $A\in\left(-\frac{2^{k-1}}{k!\cdot N},\frac{2^{k-1}}{k!\cdot N}\right)\subseteq\left(-\frac{1}{N},\frac{1}{N}\right)$,且由引理,知 A 与 $\{n^k\alpha\}$ 的差为整数(把所有的小数部分表示为原数与整数部分的差即知).

若 $A\in\left[0,\frac{1}{N}\right)$,注意到,$n^k\alpha$ 为无理数,其小数部分不为 0.

故 $\{n^k\alpha\}=A\in\left(0,\frac{1}{N}\right)\subseteq(0,\varepsilon)$.

再考虑 $A\in\left(-\frac{1}{N},0\right)$ 的情形.

此时,$\{n^k\alpha\}=1+A$.

取最大的使得 $M^k(1-\{n^k\alpha\})<1$ 成立的正整数 M.

故 $(M+1)^k(1-\{n^k\alpha\})\geqslant1$

$\Rightarrow(M+1)^k\geqslant N$.

又 $N>\left(\frac{2^k}{\varepsilon}+1\right)^k$,则 $M>\frac{2^k}{\varepsilon}$.

由 $\{(Mn)^k\alpha\}$ 与 $1-M^k(1-\{n^k\alpha\})$ 均属于$(0,1)$且差为整数,知

$\{(Mn)^k\alpha\}=1-M^k(1-\{n^k\alpha\})$

$\leqslant(M+1)^k(1-\{n^k\alpha\})-M^k(1-\{n^k\alpha\})$

$\leqslant2^kM^{k-1}(1-\{n^k\alpha\})<\frac{2^k}{M}<\varepsilon$,

其中,将 $(M+1)^k$ 用二项式定理展开,减掉 M^k 后每项 $M^i(0\leqslant i\leqslant k-1)$ 放缩成 M^{k-1} 可得到 $(M+1)^k-M^k\leqslant2^kM^{k-1}$.

根据该结论不难进一步得到稠密性定理.

对于区间$(0,1)$内的任意区间(s,t),取 $\varepsilon>0$,使得

$$\frac{t}{\varepsilon}>\left(\frac{2^k}{1-\frac{s}{t}}+1\right)^k,\qquad ①$$

取正整数 n,使得 $\{n^k\alpha\}\in(0,\varepsilon)$,再取最大的正整数 M,使得 $M^k\{n^k\alpha\}<t$(注意到,$\varepsilon<t$,这样的正整数存在).

故 $(M+1)^k\{n^k\alpha\}\geqslant t$.

从而,$(M+1)^k\geqslant\frac{t}{\varepsilon}$.

结合式①得 $\frac{2^k}{M}<1-\frac{s}{t}$.

故 $M^k\{n^k\alpha\}$

$\geqslant(M+1)^k\{n^k\alpha\}-2^kM^{k-1}\{n^k\alpha\}$

$>t-\frac{2^k}{M}t>s$.

于是,$\{(Mn)^k\alpha\}=M^k\{n^k\alpha\}\in(s,t)$.

从而,稠密性定理得证.

{nkα}稠密性的初等证明

作者：　吴昊
作者单位：　北京大学数学科学学院,100871
刊名：　中等数学
英文刊名：　High-School Mathematics
年，卷(期)：　2015(12)