北京大学 2017 年硕士研究生招生考试试题

(启封并使用完毕前按国家机密级事项管理)

考试科目：数学基础考试 1 (数学分析)　考试时间: 2016 年 12 月 25 日上午

专业：数学学院各专业 (除金融学和应用统计专业)

方向：数学学院各方向 (除金融学和应用统计方向)

说明：答题一律写在答题纸上 (含填空题、选择题等客观题), 写在此试卷上无效.

1. (10 分) 证明 $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sqrt{\pi-2x}}dx=0$.

2. (10 分) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+nx^2}\sin\frac{x}{n^\alpha}$ 在任何有限区间上一致收敛的充要条件是 $\alpha>\frac{1}{2}$.

3. (10 分) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 证明 $\lim_{s\to0+}\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-s}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

4. (10 分) 称 $\gamma(t)=(x(t),y(t))$, ($t\in$ 某个区间 I) 是 $\mathbb{R}^2$ 上 C^1 向量场 $(P(x,y),Q(x,y))$ 的积分曲线, 若 $x'(t)=P(\gamma(t)),y'(t)=Q(\gamma(t)),\forall t\in I$, 设 P_x+Q_y 在 $\mathbb{R}^2$ 上处处非 0, 证明向量场 (P,Q) 的积分曲线不可能封闭 (单点情形除外).

5. (20 分) 假设 $x_0=1,x_n=x_{n-1}+\cos x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$, 证明: 当 $x\to\infty$ 时, $x_n-\frac{\pi}{2}=o\left(\frac{1}{n^n}\right)$.

6. (20 分) 假如 $f\in C[0,1]$, $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\alpha<\beta=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$. 证明: $\forall\lambda\in(\alpha,\beta),\exists x_1,x_2\in[0,1]$ 使得 $\lambda=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

7. (20 分) 设 f 是 $(0,+\infty)$ 上的凹 (或凸) 函数且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 存在并且有限, 则 $\lim_{x\to+\infty}xf'(x)=0$ (仅在 f 可导的点考虑极限过程).

8. (20 分) 设 $\phi\in C^3(\mathbb{R}^3)$, ϕ 及其各个偏导数 $\partial_i\phi(i=1,2,3)$ 在点 $X_0\in\mathbb{R}^3$ 处取值都是 0. X_0 点的 δ 邻域记为 $U_\delta(\delta>0)$. 如果 $\left(\partial_{ij}^2\phi(X_0)\right)_{3\times3}$ 是严格正定的, 则当 δ 充分小时, 证明如下极限存在并求之:

$$\lim_{t\to+\infty}t^{\frac{3}{2}}\iiint_{U_\delta}e^{-t\phi(x_1,x_2,x_3)}dx_1dx_2dx_3.$$

9. (30 分) 将 $(0,\pi)$ 上常值函数 $f(x)=1$ 进行周期 2π 奇延拓并展为正弦级数:

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x.$$

该 Fourier 级数的前 n 项和记为 $S_n(x)$, 则 $\forall x\in(0,\pi),S_n(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{\sin 2nt}{\sin t}dt$, 且 $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=1$. 证明 $S_n(x)$ 的最大值点是 $\frac{\pi}{2n}$ 且 $\lim_{n\to\infty}S_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t}dt$.