北京大学 2017 年硕士研究生招生考试试题

(启封并使用完毕前按国家机密级事项管理)

考试科目：数学基础考试 2 (高等代数与解析几何)

考试时间: 2016 年 12 月 25 日下午

专业：数学学院各专业 (除金融学和应用统计专业)

方向：数学学院各方向 (除金融学和应用统计方向)

说明：答题一律写在答题纸上 (含填空题、选择题等客观题), 写在此试卷上无效.

1. (15 分) 设

$$x_1 = x_2 = 1, x_n = x_{n-1} + x_{n-2}.$$

试用矩阵论方法给出 x_n 通项.

2. (15 分) α, β 为欧氏空间 V 中两个长度相等的向量. 证明存在正交变换 A 使得 $A\alpha = \beta$

3. (10 分) 证明 n 阶 Hermite 矩阵 A 有 n 个实特征值 (考虑重数).

4. (20 分) F 为数域, $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$ 是 F^n 中 $2n$ 个列向量. 用 $|\alpha_1, \cdots \alpha_n|$ 表示以 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 为列向量的矩阵的行列式. 证明下面的行列式等式

$$|\alpha_1, \cdots \alpha_n| \cdot |\beta_1, \cdots \beta_n| = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_1, \cdots \alpha_{i-1}, \beta_1, \alpha_{i+1}, \cdots \alpha_n| \cdot |\alpha_i, \beta_2, \cdots \beta_n|$$

5. (20 分) F 为数域,V 是 F 上 n 维线性空间.A 是 V 上线性变换. 证明存在唯一可对角化线性变换 A_1, 幂零线性变换 A_2 使得

$$A = A_1 + A_2, \qquad A_1 A_2 = A_2 A_1.$$

6. (20 分) F 为数域,$A, B, P \in M_n(F)$,P 幂零且

$$(A - B)P = P(A - B), BP - PB = 2(A - B).$$

求一个可逆矩阵 Q 使得 $AQ = QB$.

7. (15 分) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 共面的充要条件为 $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}$ 共面.

8. (20 分) 空间中四点 O, A, B, C 使得

$$\angle AOB = \frac{\pi}{2}, \angle BOC = \frac{\pi}{3}, \angle COA = \frac{\pi}{4}.$$

设 AOB 决定的平面为 π_1,BOC 决定的平面为 π_2, 求 π_1, π_2 二面角. 求出二面角的余弦值即可.

9. (15 分) F 为单叶双曲面, $\vec{n}$ 为给定非零向量, 则空间中所有与 $\vec{n}$ 垂直的平面与 F 交线的对称中心在一条直线上.