数学新星网 ※ 学生专栏
www.nsmath.cn/xszl

2018 年国家集训队第一阶段选拔试题及解答

李一笑

(江苏省天一中学, 214101)

指导教师: 何爱君

2018 年第 59 届 IMO 中国数学奥林匹克国家集训队第一阶段活动于 2017 年 12 月 29 日至 2018 年 1 月 10 日, 在湖北省武汉市华中师范大学第一附属中学举办. 活动中进行了两次选拔考试 (每次六题). 根据考试成绩, 从 60 名集训队队员中选出 15 人参加下一轮的选拔. 在考试中, 我发挥正常, 有幸进入 15 人名单. 下面介绍我对这两次选拔考试问题的解法, 并对难度进行大致评估. 不当之处, 敬请读者批评指正.

本文用 1.a, 2.a 分别表示第 1 次考试或第 2 次的第 a 题.

题 1.1 设 p,q 是给定的两个和为 1 的正实数. 证明: 对任意一个 2017 元实数组 $(y_1,y_2,\cdots,y_{2017})$, 都存在唯一的 2017 元实数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_{2017})$, 满足

$$p\max\{x_i,x_{i+1}\}+q\min\{x_i,x_{i+1}\}=y_i, i=1,2,\cdots,2017.$$

这里 $x_{2018}=x_1$.

证明 记

$$f_y(x)=\begin{cases}\frac{y-qx}{p}, & x\le y;\\ \frac{y-px}{q}, & x>y,\end{cases}.$$

首先证明如下引理:

引理 若给定 $x,y\in\mathbb{R}$, 则 $z\in\mathbb{R}$ 满足 $p\max\{x,z\}+q\min\{x,z\}=y$ 当且仅当 $z=f_y(x)$, 其中 f 是上述定义的函数.

引理证明 充分性直接检验即可.

为证必要性. 只须注意到 $g_x(z)=p\max\{x,z\}+q\min\{x,z\}$ 在 $\mathbb{R}$ 上递增, 知 $g_x(z)=y$ 至多一个零点 z. 故有唯一零点 $f_y(x)$. 证毕.

收稿日期: 2018-02-01;　修订日期: 2018-03-29.

回到原题. 注意到, 对任意 $y\in\mathbb{R}$, $f_y(x)$ 为连续减函数.

由于若给定了 x_1, 则 $x_2=f_{y_1}(x_1)$, $x_3=f_{y_2}(x_2)$, $\cdots,x_{2017}=f_{y_{2016}}(x_{2016})$ 为定值, 只须证明恰存在一个 x_1.

考虑方程

$$f_{y_{2017}}(f_{y_{2016}}(\cdots f_{y_1}(x))\cdots)-x=0. \tag{$*$}$$

由方程左边为 x 的连续减函数, 且 $x\to\pm\infty$ 时 LHS $\to\mp\infty$, 知方程 $(*)$ 恰有一个零点.

若取 x_1 为 $(*)$ 零点. 明显此时 $(x_1,x_2,\cdots,x_{2017})$ 符合题意. 知至少存在一组 $(x_1,\cdots,x_{2017})$. 又任一组 $(x_1,\cdots,x_{2017})$ 均满足 $x_1=f_{y_{2017}}(x_{2017})=\cdots=f_{y_{2017}}(\cdots f_{y_1}(x)\cdots)$, 即 x_1 必为 $(*)$ 的唯一解. 进而 $x_2,\cdots,x_{2017}$ 为定值. 知至多有一组 $(x_1,x_2,\cdots,x_{2017})$.

综上, 恰有一组符合题意, 证毕. □

评注 此题是一个十分新颖的函数迭代问题, 实际难度不高.

题 1.2 若一个正整数的正约数的个数被 2018 整除, 则称该数为"有趣数". 确定所有正整数 d, 使得存在一个公差为 d 的无穷项等差数列, 该数列中每一项都是有趣数.

解 此题答案是: 所求 d 满足的充要条件是: 存在素数 q 满足

$$q^{1009}\mid d,\ 且\ d\neq 2^{1009}. \tag{$*$}$$

(1) 设 d 满足 $(*)$. 现给出满足要求的等差数列的构造.

若奇素数 q 满足 $q^{1009}\mid d$, 取 r 为 $\bmod q$ 的二次非剩余, 则数列

$$a_n=q^{1008}(\frac{d}{q^{1008}}n+r)$$

以 d 为公差.

由 $\tau(a_n)=1009\tau(\frac{d}{q^{1008}}n+r)$, 而 $\frac{d}{q^{1008}}n+r\equiv r\pmod q$ 知 $\frac{d}{q^{1008}}n+r$ 不为平方数. 故 $2018\mid\tau(a_n)$.

若 $2^{1009}\mid d$ 且 $d\neq 2^{1009}$, 取 $t=\frac{d}{2^{1009}}>1$.

(i) 若 t 为偶数, 令 $a_n=2^{1008}(\frac{d}{2^{1008}}n+3)$.

(ii) 若 t 为奇数, 取 $q\mid t$, q 为素数, 令 r 为 $\bmod q$ 二次非剩余. 满足 $2\nmid r$. (若不然, 将 r 换为 $r+q$). 令

$$a_n=2^{1008}(\frac{d}{2^{1008}}n+r),\ \ \tau(a_n)=1009\tau(\frac{a_n}{2^{1008}}).$$

分别有 $\frac{a_n}{2^{1008}}\equiv 3\pmod 4$ 与 $\frac{a_n}{2^{1008}}\equiv r\pmod q$, 知 $2\mid\tau(\frac{a_n}{2^{1008}})$, $2018\mid\tau(a_n)$.

综上, 我们构造出序列符合题意.

(2) 下证明: 符合题意的 d 满足 $(*)$.

设有趣数列 $\{a_n\}$ 以 d 为公差.

(a) 下证存在 q 为素数, $q^{1008} \mid (d, a_1)$, 且 $q^{1009} \mid d$.

假设结论不成立. 设 $Q = \left\{\text{素数 } q : q^{1008} \mid (d, a_1), \text{且 } q^{1009} \nmid d\right\}$. 令 P 为素数之集. 任意 $q \in P \setminus Q$, $q^{1008} \nmid (d, a_1)$.

构造同余方程组

$$a_1 + (n-1)d \equiv q^{1009} \pmod{q^{1010}}, \ \forall\, q \in Q,$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{q^{1008}} + \frac{d}{q^{1008}}(n-1) \equiv q \pmod{q^2}, \ \forall\, q \in Q.$$

由中国剩余定理, 该方程组有成等差数列的无穷个解 $n = km + t$, k, t 为定值, $m \in \mathbb{N}_+$, 其中 $k = \prod\limits_{q \in Q} q^2$.

令 $b_m = a_{km+t}$, $\{b_m\}$ 为等差数列, 其公差 $d' = kd = d \prod\limits_{q \in Q} q^2$.

令 $s = (b_1, d')$. 对任意 $q \in Q$,

$$\nu_q(s) = \min\{\nu_p(b_1), \nu_p(d')\} = \min\{1009, 2 + \nu_q(d)\} = 1009,$$

其中 $b_1 = a_{k+t} \equiv q^{1009} \pmod{q^{1010}}$.

对任意 $q \in P \setminus Q$,

$$\nu_q(s) \le \nu_q(d') = \nu_q(d) \le 1007.$$

故对任意 $q \in P$, $\nu_q(s) \not\equiv -1 \pmod{1009}$.

由狄利克雷定理, 存在 $m_0 \in \mathbb{N}_+$, $\frac{b_1}{s} + \frac{d'}{s}(m_0 - 1)$ 为素数, 且这样的 m_0 有无穷个.

取 m_0 充分大, 使 $\frac{b_1}{s} + \frac{d'}{s}(m_0 - 1) > s$, 则 $(\frac{b_1}{s} + \frac{d'}{s}(m_0 - 1), s) = 1$.

$$\begin{aligned}\tau(b_{m_0}) &= \tau(s)\tau(\frac{b_1}{s} + \frac{d'}{s}(m_0 - 1)) = 2\tau(s) \\ &= 2\prod_{q \in P}(\nu_q(s) + 1) \not\equiv 0 \pmod{1009},\end{aligned}$$

即 $1009 \nmid \tau(a_{km_0+t})$, 矛盾.

(b) 下证 $d \neq 2^{1009}$.

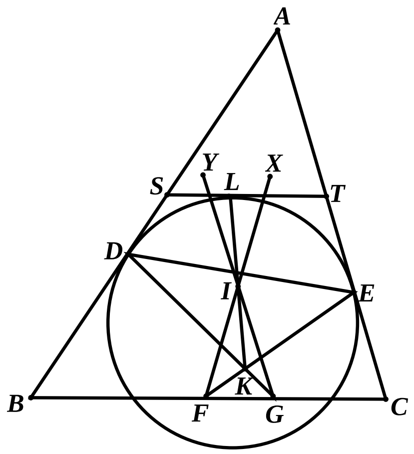
假设 $d = 2^{1009}$. 由 (a), $2^{1008} \mid (d, a_1)$. 设 $a_1 = 2^{1008}r$, 取 $k \in \mathbb{N}_+$, $k^2 > r$, $k \equiv r \pmod 2$. 则 $2^{1008}k^2 = a_{1+\frac{k^2-r}{2}}$ 为数列中项, $2 \nmid \tau(2^{1008}k^2)$. 矛盾.

由 (a) 及 (b) 知 d 满足 $(*)$, 证毕. $\square$

评注 此题想法较简单, 即约去数列公因数后使用狄利克雷定理来构造矛

盾, 但表述清楚并不容易.

题 1.3 在 $\triangle ABC$ 中, 圆 ω 与边 AB, AC 分别相切于点 D 和 E, $D \neq B$, $E \neq C$, 且 $BD + CE < BC$. 点 F, G 在边 BC 上, 满足 $BF = BD$, $CG = CE$. 设线段 DG, EF 相交于点 K. 点 L 在 ω 的劣弧 $\overset{\frown}{\mathrm{DE}}$ 上, 使得 ω 在 L 处的切线平行于 BC. 证明: $\triangle ABC$ 的内心在直线 KL 上.



证明 过 L 作切线交 AB, AC 于 S, T, 则 $ST \parallel BC$. 因此

$$\angle LDA = \angle DLS = \frac{1}{2}\angle ASL.$$

又

$$\angle BDF = \angle BFD = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ASL,$$

所以 $\angle LDF = 90^\circ$.

同理, $\angle LEG = 90^\circ$.

倍长 FI, GI 至 X, Y, 其中 I 为 $\triangle ABC$ 内心.

注意到, D, F 关于 BI 对称, E, G 关于 CI 对称, D, E 关于 AI 对称, 即

$$XI = FI = DI = EI = GI = YI.$$

故 $DEFGXY$ 六点共圆.

由 $\angle FDL = \angle FDX = 90^\circ$, 得 D, L, X 共线. 同理, E, L, Y 共线.

在 $\odot(DEFGXY)$ 中, 对六边形 $XDGYEF$ 用帕斯卡定理, 得 K, I, L 共线. 证毕. $\square$

评注 据说此题做法较多. 如果发现 $DEFG$ 共圆, 利用帕斯卡定理应该是自然的.

题 1.4 设 f 和 g 是定义在整数集且取值为整数的两个函数, 满足对任意整

数 x, y, 都有

$$f(g(x)+y)=g(f(y)+x).$$

假设 f 是有界的, 证明: g 是周期函数, 即存在正整数 T, 使得

$$g(x+T)=g(x)$$

对所有整数 x 成立.

证明 设 F 为 f 的值域. G 为 g 的值域. 对任意的 $x \in \mathbb{Z}$,

$$g(x)=g(x-f(0)+f(0))=f(0+g(x-f(0))) \in F.$$

所以 $G \subseteq F$. 同理, $F \subseteq G$, 故 $F=G$.

由 f 的有界性, 及 $F \subseteq \mathbb{Z}$, 知 F 仅由有限个元素构成. 设

$$G=\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}, \quad A_i=\{x \in Z \mid g(x)=a_i\}, \quad i=1,2, \cdots, k.$$

若 $k=1$, 则 G 为常值函数, 结论得证. 故不妨设 $k \geq 2$. 则 G 含非零元素 t, 由 $t \in F$, 设 $t=f(s)$.

注意到, 若 $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ 使 $g(x_1)=g(x_2)$, 则

$$g(x_1+t)=f(s+g(x_1))=f(s+g(x_2))=g(x_2+t). \tag{1}$$

对任意 $i \in\{1,2, \cdots, k\}$, 任取 $x_0 \in A_i$, 设 $x_0+t \in A_j$, $j \in\{1,2, \cdots, k\}$, (1) 表明对任意 $x \in A_i$, $x+t \in A_j$. 定义 $\pi(i)=j$.

另一方面, 对任意 $j \in\{1,2, \cdots, k\}$, 任取 $x_0 \in A_j$, 设 $x_0-t \in A_i$, 必有 $\pi(i)=j$.

故 $\pi:\{1,2, \cdots, k\} \rightarrow\{1,2, \cdots, k\}$ 为满射, 从而 π 为 $\{1,2, \cdots, k\}$ 上的置换. 设单位置换 $e(i)=i$ $(i=1,2, \cdots, k)$.

由熟知的结论, 存在 $M \in \mathbb{N}_{+}$, $\pi^M=e$. 则对任意 $x \in \mathbb{Z}$, 设 $x \in A_i$, 则 $x+M t \in A_{\pi^M(i)}=A_i$.

所以 $g(x)=g(x+M t)$. 故 g 以 $M|t|$ 为周期. 证毕. □

评注 此题是一道新颖的非常规的函数方程题, 有较高的组合要求.

题 1.5 给定正整数 k, 对正整数 n, 若组合数 $\mathrm{C}_n^0, \mathrm{C}_n^1, \cdots, \mathrm{C}_n^n$ 中被 k 整除的数的个数不少于 $0.99n$, 则称 n 是"好的". 证明: 存在正整数 N, 使得 $1,2, \cdots, N$ 中好的数不少于 $0.99N$ 个.

证明 对 $t \in \mathbb{N}_{+}$, $\varepsilon \in(0,1)$, 称正整数 n 为 $(t, \varepsilon)-$好的, 若 $\mathrm{C}_n^0, \mathrm{C}_n^1, \cdots, \mathrm{C}_n^n$ 中至多 εn 个不被 t 整除.

下面首先证明两个引理.

引理 1. 设 p 为素数, $\alpha\in\mathbb{N}_+$, $\varepsilon\in(0,1)$, 则存在 $\beta\in\mathbb{N}_+$, 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$, 若 n 在 p 进制下至少 β 位不为 $p-1$, 则 n 为 $(p^\alpha,\varepsilon)-$好的.

证明 取 β 使得 $\sum\limits_{i=0}^{\alpha-1}p^{1-i}(1-\frac{1}{p})^{\beta-i}\mathrm{C}_\beta^i\le\varepsilon$. 注意 β 充分大时左侧 $\to 0$, 知这样的 β 存在.

设 $p^r\le n<p^{r+1}$, 任取 n 的 β 个不为 $p-1$ 的位. (i)

设 A_i 为小于 p^{r+1} 的整数中在 (i) 确定的 β 个位上恰有 i 个为 $p-1$ 的数的个数 $(0\le i\le\beta)$, 则

$$A_i=\mathrm{C}_\beta^i p^{r+1-\beta}(p-1)^{\beta-i}\le n\mathrm{C}_\beta^i p^{1-i}(\frac{\beta-1}{p})^{\beta-i},\ \sum_{i=0}^{\alpha-1}A_i\le\varepsilon n.$$

另一方面, 使得 $p^\alpha\nmid\mathrm{C}_n^x$ 的正整数 x, 在 (i) 确定的 β 位上至多 $\alpha-1$ 位为 $p-1$.

这表明这样的数的个数 $\le\sum\limits_{i=0}^{\alpha-1}A_i\le\varepsilon n$. 故 n 为 $(p^\alpha,\varepsilon)-$好数. 证毕.

引理 2. 设 p 为素数, $\beta\in\mathbb{N}_+$, $\varepsilon\in(0,1)$, 则存在 $N_0\in\mathbb{N}_+$, 对任意的 $N\ge N_0$, $1,2,\cdots,N$ 中至多 εN 个在 p 进制下至多 $\beta-1$ 位不为 $p-1$.

证明 令 $N_0=p^\gamma$, 其中 γ 满足对任意 $r\ge\gamma$, $\sum\limits_{i=0}^{\beta-1}(p-1)^i\mathrm{C}_{r+2}^{i+1}\le\varepsilon p^r$. 注意到左边为 r 多项式, 知对充分大的 γ 满足条件.

设 $p^r\le N<p^{r+1}$, 则 $r\ge\gamma$.

只须证明: 在 $1,2,\cdots,p^{r+1}-1$ 中, 至多 εp^r 个使在 p 进制下至多 $\beta-1$ 位不为 $p-1$.

设在全体 j 位数中, p 进制下至多 $\beta-1$ 位不为 $p-1$ 的有 $B_j(1\le j\le r+1)$ 个. 其中 p 进制下恰有 i 位不为 $p-1$ 的有 $C_{i,j}(0\le i<\beta)$ 个, 由

$$C_{i,j}\le\mathrm{C}_j^i(p-1)^i$$

知

$$B_j=\sum_{i=0}^{\beta-1}C_{i,j}\le\sum_{i=0}^{\beta-1}(p-1)^i\mathrm{C}_j^i.$$

则在 $1,2,\cdots,p^{r+1}-1$ 中, 在 p 进制下至多 $\beta-1$ 位不为 $p-1$ 的数的个数为

$$\sum_{j=1}^{r+1}B_j\le\sum_{j=1}^{r+1}\sum_{i=0}^{\beta-1}(p-1)^i\mathrm{C}_j^i=\sum_{i=0}^{\beta-1}(p-1)^i\mathrm{C}_{r+2}^{i+1}\le\varepsilon p^r.$$

从而结论得证.

推论 对任意素数 p, $\alpha\in\mathbb{N}_+$, $\varepsilon\in(0,1)$, 存在 $N_0\in\mathbb{N}_+$, 对任意 $N\ge N_0$,

$1, 2, \cdots, N$ 中至多 εN 个不为 $(p^\alpha, \varepsilon)-$好数.

回到原题.

若 $k = 1$, 结论显然成立. 不妨设 $k \geq 2$.

设 $k = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$, $t \in \mathbb{N}_+$, p_i 为素数, $\alpha_i \in \mathbb{N}_+$, $i \in \{1, 2, \cdots, t\}$.

对 $i = 1, 2, \cdots, t$, 由推论, 存在 $N_i \in \mathbb{N}_+$, 对任意 $N \geq N_i$, $1, 2, \cdots, N$ 中至多 $\frac{0.01}{t}N$ 个不为 $(p_i^{\alpha_i}, \frac{0.01}{t})-$好数.

取 $N \geq \max\limits_{1 \leq i \leq t} N_i$. 则 $1, 2, \cdots, N$ 中至少 $0.99N$ 个同时为 $(p_i^{\alpha_i}, \frac{0.01}{t})-$好数, $i = 1, 2, \cdots, t$. $(*)$

由对 $n \in \mathbb{N}_+$, 若 n 同时为 $(p_i^{\alpha_i}, \frac{0.01}{t})-$好数, 则 $\mathrm{C}_n^0, \mathrm{C}_n^1, \cdots, \mathrm{C}_n^n$ 中至多 $\frac{0.01}{t}n$ 个不为 $p_i^{\alpha_i}$ 的倍数. 故至多 $0.01n$ 个不被某个 $p_i^{\alpha_i}$ 整除.

故至少 $0.99n + 1$ 个为所有 $p_i^{\alpha_i}$ 的倍数, 故 n 为好数.

从而 $(*)$ 即 $1, 2, \cdots, N$ 中至少 $0.99N$ 个好数. 证毕. □

评注 此题没有本质上的难度, 即只要取充分大的 N 即可. 但说清楚有些困难.

题 1.6 设 m, n 是正整数, $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是某个 n 元集合的 m 个子集. 证明:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |A_i| \cdot |A_i \cap A_j| \geq \frac{1}{mn}\left(\sum_{i=1}^{m} |A_i|\right)^3,$$

其中 $|X|$ 表示集合 X 的元素个数.

证明 原不等式等价于

$$mn\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} |A_i||A_i \cap A_k| \geq \left(\sum_{i=1}^{m} |A_i|\right)^3. \qquad (*)$$

令 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. 则令

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & x_j \in A_i; \\ 0, & x_j \notin A_i. \end{cases}$$

$$a_i = |A_i| = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}, \ \ b_j = \sum_{i=1}^{m} c_{ij}.$$

故

$$(*) \Leftrightarrow m\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i c_{ij} c_{kj} \geq \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^3$$

$$\Leftrightarrow mn\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_ib_jc_{ij}\geq\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\right)^3. \qquad (**)$$

不妨设 $a_i\neq 0,\ b_j\neq 0,\ i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n$. 这是因为, 若某个 $A_i=\emptyset$, 或某个 x_j 不属于任何一个 A_i, 则将其删去. 而 $(*)$ 左侧减小, 右侧不变.

注意到,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_{ij}}{a_i}=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i}{a_i}=m,\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_{ij}}{b_i}=n.$$

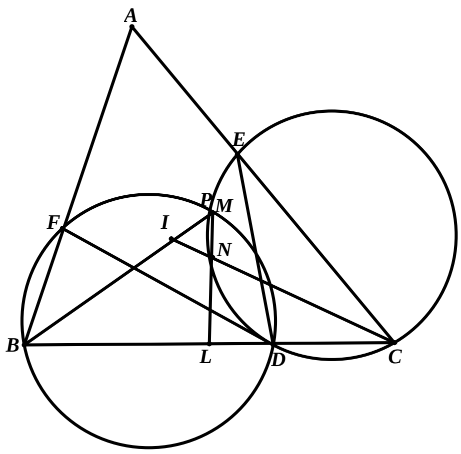
所以

$$\begin{aligned}(**)\Leftrightarrow&\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_ib_jc_{ij}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_{ij}}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_{ij}}{b_j}\right)\\ &\geq\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\right)^3.\end{aligned}$$

由 mn 元赫尔德不等式, 上式显然. 证毕. □

评注 此题为第一次测试最难的题, 其中等价变形难度较大.

题 2.1 在平面上给定三角形 ABC. 设 D,E,F 分别是边 BC,CA,AB 上的动点, 满足 $BD=CE,CD=BF$. 过 B,D,F 三点的圆与过 C,D,E 三点的圆交于点 D 及另一点 P. 证明: 平面中存在一点 Q, 使得线段 PQ 的长度为定值.



证明 作 $\triangle ABC$ 内心 I, 作 BC 中垂线交 BC,BI,CI 于 L,M,N. 则

$$BM=\frac{BC}{2\cos\angle MBL}=\frac{BC}{\frac{\sin\angle ABC}{\sin\frac{1}{2}\angle ABC}}=\frac{(BD+BF)\sin\frac{1}{2}\angle ABC}{\sin\angle ABC}.$$

即

$$BM\sin\angle DBF=BD\sin\angle MBD+BF\sin\angle MBF.$$

由正弦定理, $BDMF$ 共圆.

同理, $CDME$ 共圆.

我们证明 P 在 $\odot MNI$ 上.

若 $P=M$ 或 $P=N$, 结论已成立. 设 $P\notin\{M,N\}$, 则

$$\begin{aligned}\measuredangle MPN&=\measuredangle MPD+\measuredangle DPN=\measuredangle MBD+\measuredangle DCN\\&=\measuredangle(BM,CN)=\measuredangle MIN.\end{aligned}$$

从而 $PMNI$ 共圆. 又 $\odot MNI$ 为定圆, 知结论成立. □

评注 若熟悉 $\odot BDF$ 过定点的基本结论, 则可秒做此题. 若不熟悉则容易走弯路; 若一开始尝试找定圆的圆心, 则基本做不下去.

题 2.2 设 $P(n)$ 是将 n 表示为若干个 (不计次序) 正整数之和的方法数. 例如 $P(4)=5$, 因为 4 有如下 5 个表示:

$$4,\ 1+3,\ 2+2,\ 1+1+2,\ 1+1+1+1.$$

求所有正整数 n, 满足

$$P(n)+P(n+4)=P(n+2)+P(n+3).$$

解 定义 $P_k(n)$ 为将 n 表为无序的不小于 k 的正整数之和的方法数, $n,k\in\mathbb{N}_+$. 则 $P(n)=P_1(n)$. 首先证明

引理 $P_k(n)=P_k(n-k)+P_{k+1}(n)$, $n\geq k, n,k\in\mathbb{N}_+$.

证明 将 n 分为不小于 k 的正整数的分法共 $P_k(n)$ 个, 其分为两类:

(1) 不含 k 的共有 $P_{k+1}(n)$ 个; (2) 含 k 的分法.

每种去掉一个 k, 知有 $P_k(n-k)$ 个.

故结论得证.

回到原题.

$$\begin{aligned}&P(n)+P(n+4)-P(n+2)-P(n+3)\\=&\ (P(n+1)-P_2(n+1))+(P(n+3)+P_2(n+4))\\&-(P_2(n+2)+P(n+1))-P(n+3)\\=&\ -P_2(n+1)+P_2(n+4)-P_2(n+2)\\=&\ P_3(n+4)-P_2(n+1).\end{aligned}$$

从而只须求 $n\in\mathbb{N}_+$, 使 $P_3(n+4)=P_2(n+1)$.

对 $n\leq 10$ 穷举得 $n=1,3,5$ 符合.

$n \geq 11$ 时, 我们证明: $P_2(n+1) > P_3(n+4)$.

以无序数组表示一个分法.

将 $n+4$ 分为不小于 3 的数的分法, 分为 1 个的有 1 种, 分为 2 个的有 $[\frac{n}{2}]$ 种, 设分为不少于 3 个的分法组成集合 X.

$$P_3(n+4) = 1 + \left[\frac{n}{2}\right] + |X|.$$

将 $n+1$ 分为不小于 2 的数的分法, 分为 1 个的有 1 种, 分为 2 个的有 $[\frac{n-1}{2}]$ 种, 设分为不少于 3 个的分法组成集合 Y.

$$P_2(n+1) = 1 + \left[\frac{n-1}{2}\right] + |Y|.$$

下证 $|Y| \geq |X| + 2$.

我们构造单射 $f : X \to (Y \setminus \{(2,2,2,2,n-7),(2,2,2,2,2,n-9)\})$.

对 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_k) \in X$, $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k$, $k \geq 3$. 令

$$f(x) = (x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1, x_4, \cdots, x_k).$$

明显 f 为单射满足题意. 故 $|Y| - 2 \geq |X|$.

从而

$$P_2(n+1) \geq 1 + \left(\left[\frac{n}{2}\right] - 1\right) + |X| + 2 > 1 + \left[\frac{n}{2}\right] + |X| = P_3(n+4).$$

故 $n \geq 11$ 不符合.

综上, 所求 $n = 1, 3, 5$. □

评注 等价变形来简化问题. 实际上, 题中的 2, 3, 4 均是选好的; 若稍变一下也许这题就不能做了. $P(n)$ 的解析表达式属于未解之谜, 所以此题不可能有无穷多组有规律的解.

题 2.3 给定正整数 p, q, 黑板上写有 n 个正整数, 允许对这些数进行如下操作: 任取黑板上两个相同的数 a 与 a, 将这两个数擦去后再写上 $a+p$ 与 $a+q$, 这称为一次操作. 如果黑板上 n 个数互不相同, 则不能再操作. 求最小的正整数 n, 使得可在黑板上写 n 个正整数, 对这 n 个数存在一个无限的操作序列.

解 答案是 $\frac{p+q}{(p,q)}$.

首先给出 $n = \frac{p+q}{(p,q)}$ 的构造: 取 $d = (p,q)$, $p = p_1 d$, $q = q_1 d$. 令

$$A_i = \{(i+1)d, (i+2)d, \cdots, (i+p_1)d, (i+1)d, (i+2)d, \cdots, (i+q_1)d\}$$

为可重集 ($i \in \mathbb{N}$).

对 A_i 中的两个 $(i+1)d$ 操作一次即得 A_{i+1}. 故可从 A_0 出发每次操作最小

元, 得一无穷操作序列.

下证 $n=\frac{p+q}{(p,q)}$ 为最小值.

仍令 $d=(p,q)$, $p=p_1d$, $q=q_1d$. 不妨设 $p\le q$. 取一元素个数最少的可操作无穷次的集合 A, 设 $|A|=n$. 由构造部分, $n\le\frac{p+q}{(p,q)}$.

设 $A_0=A$. 则存在无穷可重集合列 $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, 使 A_i 操作一次得到 A_{i+1}.

注意到数列 $\{t_i=\min A_i\}$ 单调不减. 下证 $\{t_i\}$ 无界. 若不然, 存在 $i_0\in\mathbb{N}_+$, 对任意 $i\ge i_0$, 有 $t_i=t$. 则从 A_{i_0} 中删去一个 t 后仍能操作无穷次, 与 n 最小性矛盾.

设 $K=\{x\in\mathbb{N}_+\mid x\in A_i, i\in\mathbb{N}\}$ 为在各 A_i 中出现过的元素.

对任意 $x\in K$, 设 $x\in A_j$. 则由 $\{t_i\}$ 无界性, 存在 $k\ge j$, 满足 $t_k>x$. 故取最小的 $k\ge j$ 使 $x\notin A_k$, 必有对 A_{k-1} 的两个 x 操作一次得到 A_k.

这表明 $x+p, x+q\in A_k$, 即 $x+p, x+q\in K$. 故 $K+p, K+q\subseteq K$. 进而

$$K+(up+vq)\subseteq K,\ \ u,v\in\mathbb{N}.$$

另一方面, 由熟知结论, 对任意 $s\ge(p_1-1)(q_1-1)$, 存在 $u,v\in\mathbb{N}$, 使得 $p_1u+q_1v=s$. 从而, $K+sd\subseteq K$.

任取 $t\in K$, $M\ge(p_1-1)(q_1-1)$, $M\in\mathbb{N}_+$.

定义 c_i 为可重集 A_i 中小于 $t+Md+q$ 的元素个数. 则当 i 充分大时 $c_i=0$. 取 i_0 使 $c_{i_0}=0$. 显然 $\{c_i\}$ 单调不增.

注意到 $t+Md+rd\in K$, $r=0,1,\cdots,q_1-1$. 故对这些数各至少操作一次. 设对 A_{j_r} 中的两个 $t+Md+rd$ 操作一次得到 A_{j_r+1}, $r=0,1,\cdots,q_1-1$. 则

$$c_{j_r}-c_{j_r+1}=\begin{cases}1, & 0\le r<q_1-p_1;\\ 2, & q_1-p_1\le r<q_1.\end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned} n=|A_0|\ge c_0&=c_{i_0}+\sum_{i=0}^{i_0-1}(c_i-c_{i+1})\\ &\ge\sum_{r=0}^{q_1-1}(c_{j_r}-c_{j_r+1})=p_1+q_1\\ &=\frac{p+q}{(p,q)}.\end{aligned}$$

证毕. □

评注 此题是第二次的 6 题中最困难的题, 说理也不容易说清楚. 较明显的想法是不妨设 (p,q) 互质, 并且每次操作最小的数.

题 2.4 设 k 是大于 1 的整数, 且 $k-1$ 有平方因子, M 是正整数. 证明: 存在正实数 α, 使得对任意正整数 n, 数 $[\alpha k^n]$ 与 M 互素. 这里 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

注: 对正整数 m, 若存在整数 $d>1$, 使得 $d^2 \mid m$, 则称 m 有平方因子.

证明 设 $k=ad^2+1$, a 无平方因子, $d \in \mathbb{N}_+$, $d \geq 2$.

设对正整数 m, $P(m)=\{p \in \mathbb{N}_+ \mid p \text{ 为素数}, p \mid m\}$.

取 $Q=P(M) \setminus P(adk)$.

由中国剩余定理, 存在 $t \in \mathbb{N}_+$, 使

$$\begin{cases} t \equiv 1 \pmod{ad^2k}; \\ t \equiv 0 \pmod{q}, q \in Q. \end{cases}$$

令 $\alpha=\frac{t(d+1)}{d}$. 由

$$t(d+1)k^n \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{d},$$

知 $\left\{\frac{t(d+1)k^n}{d}\right\}=\frac{1}{d}$. 所以

$$[\alpha k^n]=\frac{t(d+1)k^n-1}{d},\ n \in \mathbb{N}_+.$$

$$([\alpha k^n], ad)=\frac{(t(d+1)k^n-1, ad^2)}{d}=\frac{(d, ad^2)}{d}=1.$$

$$([\alpha k^n], k) \mid (t(d+1)k^n-1, k)=1.$$

$$([\alpha k^n], q)=(t(d+1)k^n-1, q)=1,\ \ q \in Q.$$

故对任意 $q \in p(M)$, $q \nmid [\alpha k^n]$. 即 $(M, [\alpha k^n])=1$. 从而符合题意, 证毕. □

评注 若猜 α 为无理数, 则几乎不可能做出. 反之则很容易想到以 d 为分母构造 (k 进制下) 循环小数.

题 2.5 给定正整数 n 和 k, 满足 $n \geq 4k$. 求最小的实数 $\lambda=\lambda(n,k)$, 使得对任意正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 都有

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{a_i^2+a_{i+1}^2+\cdots+a_{i+k}^2}} \leq \lambda,$$

这里 $a_{n+j}=a_j$, $j=1,2,\cdots$.

解 令 $M \in \mathbb{R}_+$, $a_i=M^{-i}$, $i=1,2,\cdots,n$. 令 $M \to +\infty$, 则 LHS $\to n-k$. 故 $\lambda \geq n-k$.

下证 $\lambda=n-k$ 符合.

(1) $n=4$, $k=1$ 时, 两边平方, 只须证

$$\begin{aligned}&\frac{a_1^2}{a_1^2+a_2^2}+\frac{a_2^2}{a_2^2+a_3^2}+\frac{a_3^2}{a_3^2+a_4^2}+\frac{a_4^2}{a_4^2+a_1^2}\\&+\frac{2a_1a_2}{\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(a_2^2+a_3^2)}}+\frac{2a_2a_3}{\sqrt{(a_2^2+a_3^2)(a_3^2+a_4^2)}}+\frac{2a_3a_4}{\sqrt{(a_3^2+a_4^2)(a_4^2+a_1^2)}}\\&+\frac{2a_4a_1}{\sqrt{(a_4^2+a_1^2)(a_1^2+a_2^2)}}+\frac{2a_1a_3}{\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(a_3^2+a_4^2)}}+\frac{2a_2a_4}{\sqrt{(a_2^2+a_3^2)(a_4^2+a_1^2)}}\\&\leq 9.\end{aligned}\tag{$*$}$$

由

$$\begin{aligned}&\frac{a_1^2}{a_1^2+a_2^2}+\frac{a_2^2}{a_2^2+a_3^2}+\frac{a_3^2}{a_3^2+a_4^2}+\frac{a_4^2}{a_4^2+a_1^2}\\\leq&\frac{a_1^2+a_3^2+a_4^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}+\frac{a_2^2+a_4^2+a_1^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}+\frac{a_3^2+a_1^2+a_2^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}+\frac{a_4^2+a_2^2+a_3^2}{a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2}\\=&3,\end{aligned}$$

以及

$$\frac{a_1a_3}{\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(a_3^2+a_4^2)}}+\frac{a_2a_4}{\sqrt{(a_2^2+a_3^2)(a_4^2+a_1^2)}}\leq\frac{a_1a_3}{a_1a_3+a_2a_4}+\frac{a_2a_4}{a_1a_3+a_2a_4}=1,$$

$$\frac{a_1a_2}{\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(a_2^2+a_3^2)}}+\frac{a_3a_4}{\sqrt{(a_3^2+a_4^2)(a_4^2+a_1^2)}}\leq\frac{a_1a_2}{a_1a_2+a_2a_3}+\frac{a_3a_4}{a_3a_4+a_4a_1}=1,$$

$$\frac{a_2a_3}{\sqrt{(a_2^2+a_3^2)(a_3^2+a_4^2)}}+\frac{a_4a_1}{\sqrt{(a_4^2+a_1^2)(a_1^2+a_2^2)}}\leq\frac{a_2a_3}{a_2a_3+a_3a_4}+\frac{a_4a_1}{a_4a_1+a_1a_2}=1,$$

知 $(*)$ 成立.

(2) $n=4k$ 时,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{4k}\frac{a_i}{\sqrt{a_i^2+\cdots+a_{i+k}^2}}\leq\sum_{i=1}^{4k}\frac{a_i}{\sqrt{a_i^2+a_{i+k}^2}}\\=&\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{a_i}{\sqrt{a_i^2+a_{i+k}^2}}+\frac{a_{i+k}}{\sqrt{a_{i+k}^2+a_{i+2k}^2}}+\frac{a_{i+2k}}{\sqrt{a_{i+2k}^2+a_{i+3k}^2}}+\frac{a_{i+3k}}{\sqrt{a_{i+3k}^2+a_i^2}}\right)\\\leq&\sum_{i=1}^{k}3=3k=n-k.\end{aligned}$$

(3) 对 n 归纳. $n=4k$ 时已证.

设结论对 $n-1$ 成立. 考虑当 n 时, 不妨设 $a_n=\max\{a_1,\cdots,a_n\}$.

令 $a_i'=a_i$, $i=1,2,\cdots,n-1$. $a_{i+n-1}'=a_i'$.

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\sqrt{a_i^2+\cdots+a_{i+k}^2}}\leq 1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{\sqrt{a_i^2+\cdots+a_{i+k}^2}}$$

$$\leq 1+\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i'}{\sqrt{a_i'^2+\cdots+a_{i+k}'^2}}.$$

由归纳假设,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i'}{\sqrt{a_i'^2+\cdots+a_{i+k}'^2}} \leq n-1-k.$$

故结论对 n 成立.

由归纳法, 对任意 $n \in \mathbb{N}_+$, $n \geq 4k$. 结论成立. 证毕. □

评注 此题的归纳奠基 $(n=4, k=1)$ 有一定难度, 后面的归纳法是自然的.

题 2.6 设 a, b, r 是整数, $a \geq 2, r \geq 2$. 若存在函数 $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 和整数 M 满足下列条件:

(1) 对任意整数 n, $f^{(r)}(n) = an+b$, 这里 $f^{(r)}$ 表示 f 的 r 次迭代;

(2) 对任意整数 $n \geq M$, 有 $f(n) \geq 0$;

(3) 对任意整数 m, n, $m > n \geq M$, 有 $(m-n) \mid (f(m)-f(n))$.

证明: 存在正整数 c, 使得 $a = c^r$.

证明 任取 $m > M$. 令 $s = f(m)$, $t = f(m+1)-f(m)$.

假设存在 i, 使得 $f(m+i) \neq s+it$, 且 $i \in \mathbb{N}_+$.

令 $d = |f(m+i)-(s+it)|$.

取 $x \in \mathbb{N}_+$ 充分大, 则对任意 $y \geq x$,

$$\begin{cases} y > d+i; \\ ty+s+y(y-1) \geq M+2xy; \\ ty+s-y(y-1) < 0; \\ M+(2n)^r y > a(m+y)+b. \end{cases}$$

从而对任意 $y \geq x$,

$$\begin{cases} y-i \mid f(m+y)-f(m+i); \\ y \mid f(m+y)-f(m); \\ y-1 \mid f(m+y)-f(m+1). \end{cases}$$

这说明 $y(y-1) \mid f(m+y)-(s+ty)$.

由 $(s+ty)-y(y-1) < 0$, 及 $f(m+y) \geq 0$ 知 $f(m+y) \geq s+ty$.

若 $f(m+y) = s+ty$, 则 $y-i \mid d$, 但 $y-i > d > 0$, 矛盾.

故 $f(m+y) \geq s+ty+y(y-1) \geq m+2ay$, $y \in \mathbb{N}_+$, $y \geq x$.

迭代 r 次得

$$f^{(2)}(m+y) \geq m+2a(f(m+y)-m) \ \geq m+(2a)^r y$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(r)}(m+y) \geq m+2a(f^{(r-1)}(m+y)-m) \ \geq m+(2a)^r y > a(m+y)+b$$

矛盾.

故假设不成立. 即对任意 $i \in \mathbb{N}$, $f(m+i) = s+ti \geq 0$. 故 $s \geq 0, t \geq 0$.

若 $t=0$, 则 $f(m) = f(m+1)$, 即 $f^{(r)}(m) = f^{(r)}(m+1)$, 矛盾. 故 $t > 0$.

令 $g(x) = t(x-m)+s$.

取 x 充分大, 使 $x > m$, $g(x) > m$, $g^{(2)}(x) > m$, $\cdots$, $g^{(r)}(x) > m$. 则对任意 $y \geq x$, $y \in \mathbb{N}_+$. $f(y) = g(y)$, $f^{(2)}(y) = g^{(2)}(y)$, $\cdots$, $f^{(r)}(y) = g^{(r)}(y)$.

比较 $f^{(r)}(y) = g^{(r)}(y)$ 两边一次项系数, 知 $a > t^r$. 证毕. $\square$

评注 此题作为第六题似乎难度不够. 它比第三题稍简单. 也比第五题简单. 但表述稍有难度.