专业:________

考生座位号:________

所在院校:________

准考证号:________

姓名:________

密封线　答题时不要超过此线

第五届中国大学生数学竞赛决赛一、二年级试卷
(数学类, 2014年3月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	15	20	20	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 15 分) 设 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中的抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $P=(a,b,c)$ 为 S 外一固定点，满足 $a^2+b^2>2c$. 过 P 作 S 的所有切线. 证明：这些切线的切点落在同一张平面上.

得分	
评阅人	

二、 (本题 15 分) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^TAx$, 其中

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}2&a_0&2&-2\\a&0&b&c\\d&e&0&f\\g&h&k&4\end{pmatrix},$$

a_0,a,b,c,d,e,f,g,h,k 皆为实数. 已知 $\lambda_1=2$ 是 A 的一个几何重数为 3 的特征值. 试回答以下问题:

(i) A 能否相似于对角矩阵；若能, 请给出证明；若不能, 请给出例子.

(ii) 当 $a_0=2$ 时, 试求 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在正交变换下的标准型.

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考生座位号:______ 专业:______

密封线　答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 n 阶实方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

有 n 个线性无关的特征向量, $b_1,\ldots,b_{n-1}$ 均不为 $\mathbf{0}$. 记

$$\boldsymbol{W}=\{\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid \boldsymbol{XA}=\boldsymbol{AX}\}.$$

证明: $\boldsymbol{W}$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 且 $\boldsymbol{I},\boldsymbol{A},\ldots,\boldsymbol{A}^{n-1}$ 为其一组基, 其中 $\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位阵.

得分	
评阅人	

四、(本题 15 分) 设 $f(x,y)$ 为 $[a,b]\times\mathbb{R}$ 上关于 y 单调下降的二元函数. 设 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 是可微函数, 且满足:

$$y'=f(x,y),\ \ z'\le f(x,z), x\in[a,b].$$

已知 $z(a)\le y(a)$. 求证: $z(x)\le y(x), x\in[a,b]$.

得分	
评阅人	

五、(本题 20 分) 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上非负可导函数, $f(0)=0$, $f'(x)\leqslant\frac{1}{2}$. 假设 $\int_0^{+\infty}f(x)\,dx$ 收敛. 求证: 对任意 $\alpha>1$, $\int_0^{+\infty}f^\alpha(x)\,dx$ 也收敛, 并且

$$\int_0^{+\infty}f^\alpha(x)\,dx\leqslant\left(\int_0^{+\infty}f(x)\,dx\right)^\beta,\quad \beta=\frac{\alpha+1}{2}.$$

专业:______ 考生座位号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 对多项式 $f(x)$, 记 $d(f)$ 为其最大和最小实根之间的距离. 设 $n \geq 2$ 为自然数. 求最大实数 C, 使得对任意所有根都是实数的 n 次多项式 $f(x)$, 都有 $d(f') \geq C d(f)$.