第五届中国大学生数学竞赛决赛三、四年级试卷解答
(数学类, 2014年3月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

注意: 1. 前 4 题是必答题, 再从 5–11 题中任选两题, 题号要填如上面的表中.
2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、 (本题 15 分) 设 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中的抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $P=(a,b,c)$ 为 S 外一固定点，满足 $a^2+b^2>2c$. 过 P 作 S 的所有切线. 证明：这些切线的切点落在同一张平面上.

证明 设 ℓ 是过 P 点的抛物面 S 的一条切线, 它的方向向量为 $V=(u,v,w)$. 则切点可表成 $Q=P+tV=(a+tu,b+tv,c+tw)$, 其中 t 是二次方程

$$2(c+tw)=(a+tu)^2+(b+tv)^2,$$

也就是

$$(u^2+v^2)t^2+2(au+bv-w)t+(a^2+b^2-2c)=0$$

的唯一重根. (5分)

这时,

$$(au+bv-w)^2=(u^2+v^2)(a^2+b^2-2c),$$

$$t=\frac{w-au-bv}{u^2+v^2}=\frac{a^2+b^2-2c}{w-au-bv}.$$

(10分)

于是切点 $Q=(X,Y,Z)=(a+tu,b+tv,c+tw)$ 满足

$$aX+bY-Z=(a^2+b^2-c)+t(au+bv-w)=c.$$

(15分)

于是所有切点 Q 落在平面 $ax+by-z=c$ 上.

二、 (本题 15 分) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^TAx$, 其中

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}2&a_0&2&-2\\a&0&b&c\\d&e&0&f\\g&h&k&4\end{pmatrix},$$

a_0,a,b,c,d,e,f,g,h,k 皆为实数. 已知 $\lambda_1=2$ 是 A 的一个几何重数为 3 的特征值. 试回答以下问题:

(i) A 能否相似于对角矩阵; 若能, 请给出证明; 若不能, 请给出例子.

(ii) 当 $a_0=2$ 时, 试求 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在正交变换下的标准型.

证明 (i) 由于 $tr(A)$ 是 A 的特征值之和, 得 λ_1 的代数重数也是 3, 而 A 的另一个特征值 $\lambda_2=0$, 且 $\lambda_2=0$ 的代数重数为 1. 结果 A 有四个线性无关的特征向量. 故 A 可对角化. (5分)

(ii) 由于 $\lambda_1=2$ 的重数为 3, 故有

$$\mathrm{r}ank(A-2E)=\mathrm{r}ank\begin{pmatrix}0&2&2&-2\\a&-2&b&c\\d&e&-2&f\\g&h&k&2\end{pmatrix}=1. \qquad (7分)$$

进而 $a/0=-2/2=b/2=c/-2$, 得 $a=0,b=-2,c=2$; $d/0=e/2=-2/2=f/-2$, 得 $d=0,e=-2,f=2$; $g/0=h/2=k/2=2/-2$, 得 $g=0,h=-2,k=-2$. 于是,

$$A=\begin{pmatrix}2&2&2&-2\\0&0&-2&2\\0&-2&0&2\\0&-2&-2&4\end{pmatrix}. \qquad (10分)$$

注意到 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^TAx=x^TBx$, 其中

$$B=\frac{A+A^T}{2},\ B=\begin{pmatrix}2&1&1&-1\\1&0&-2&0\\1&-2&0&0\\-1&0&0&4\end{pmatrix}.$$

B 的特征值为 $\lambda_1=2$ (二重), $\lambda_2=1+2\sqrt{3}$ (一重), $\lambda_3=1-2\sqrt{3}$ (一重). 故 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在正交变换下的标准型为

$$2y_1^2+2y_2^2+(1+2\sqrt{3})y_3^2+(1-2\sqrt{3})y_4^2. \qquad (15分)$$

三、(本题 20 分) 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上非负可导函数, $f(0)=0$, $f'(x)\leqslant \frac{1}{2}$. 假设 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛. 求证: 对任意 $\alpha>1$, $\int_0^{+\infty} f^{\alpha}(x)\,dx$ 也收敛, 并且

$$\int_0^{+\infty} f^{\alpha}(x)\,dx \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f(x)\,dx\right)^{\beta}, \quad \beta=\frac{\alpha+1}{2}.$$

证明 令

$$g(t)=\left(\int_0^t f(x)\,dx\right)^{\beta}-\int_0^t f^{\alpha}(x)\,dx, \tag{5分}$$

则 $g(t)$ 可导, 且

$$g'(t)=f(t)\left[\beta\left(\int_0^t f(x)\,dx\right)^{\beta-1}-f^{\alpha-1}(t)\right].$$

令

$$h(t)=\beta^{\frac{1}{\beta-1}}\int_0^t f(x)\,dx-f^2(t). \tag{10分}$$

则有

$$h'(t)=f(t)\left[\beta^{\frac{1}{\beta-1}}-2f'(t)\right].$$

由于 $\beta>1$, $f'(x)\leqslant\frac{1}{2}$, 我们有 $h'(t)\geqslant 0$. 这说明 $h(t)$ 单调递增, (15分)

从 $h(0)=0$, 得 $h(t)\geqslant 0$. 因而 $g'(t)\geqslant 0$. 再从 $g(0)=0$, 可得 $g(t)\geqslant 0$, 即

$$\int_0^t f^{\alpha}(x)\,dx \leqslant \left(\int_0^t f(x)\,dx\right)^{\beta}.$$

令 $t\to+\infty$, 即得所证. (20分)

四、 (本题 20 分) 对多项式 $f(x)$, 记 $d(f)$ 表示其最大和最小实根之间的距离. 设 $n \geq 2$ 为自然数. 求最大实数 C, 使得对任意所有根都是实数的 n 次多项式 $f(x)$, 都有 $d(f') \geq Cd(f)$.

证明 $C_{\max} = \sqrt{1 - \frac{2}{n}}$. (2分)

不妨 $f(x)$ 的最小实根为 0, 最大实根为 a. 设

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n),\ 0 = x_1 \leq x_2, \cdots, x_{n-1} \leq x_n = a.$$

先证以下

引理: 若存在 $2 \leq k, m \leq n-1$ 使得 $x_k < x_m$, 令 $x_k < x'_k \leq x'_m < x_m$ 满足 $x_k + x_m = x'_k + x'_m$, 令

$$f_1(x) = (x - x'_1)(x - x'_2)\cdots(x - x'_n),\ x'_i = x_i,\ i \neq k, m.$$

则有 $d(f'_1) \leq d(f')$. (5分)

证明: 注意到 $f(x) = f_1(x) - \delta F(x)$, 其中

$$F(x) = \frac{f_1(x)}{(x - x'_k)(x - x'_m)},\ \delta = x'_k x'_m - x_k x_m > 0.$$

设 α 和 β 分别为 $f'_1(x)$ 的最大和最小实根, 则有 $f_1(\alpha) \leq 0$, $f_1(\beta)(-1)^n \leq 0$. 由罗尔定理 $\alpha \geq x_m, \beta \leq x_k$, 并且

$$f'(\alpha) = \delta \frac{(2\alpha - x'_k - x'_m)}{(\alpha - x'_k)^2(\alpha - x'_m)^2} f_1(\alpha).$$

则 $f'(\alpha)f_1(\alpha) \geq 0$. 故 $f'(\alpha) \leq 0$. 这表明 $f'(x) = 0$ 的最大实根大于或等于 α. 同理, $f'(x) = 0$ 最小实根小于或等于 β. 引理证毕. (12分)

令

$$g(x) = x(x-a)(x-b)^{n-2},\ b = \frac{x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1}}{n-2}.$$

由引理得到 $d(f') \geq d(g')$. (15分)

由于

$$g'(x) = (x-b)^{n-3}(nx^2 - ((n-1)a + 2b)x + ab),$$

$$d(g') = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{n} + \left(\frac{a-2b}{n}\right)^2} \geq \sqrt{1 - \frac{2}{n}}\ a.$$

于是 C 的最大值 $C_{max} \geq \sqrt{1 - \frac{2}{n}}$, 且当 $f(x) = x(x-a)(x-a/2)^{n-2}$ 时, $d(f') = \sqrt{1 - \frac{2}{n}} d(f)$. (20分)

五、(常微分方程 15 分) 设 $f(x,y)$ 为 $[a,b]\times R$ 上关于 y 单调下降的二元函数. 设 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 是可微函数, 且满足:

$$y'=f(x,y),\ z'\le f(x,z),x\in[a,b].$$

已知 $z(a)\le y(a)$. 求证: $z(x)\le y(x),x\in[a,b]$.

证明: 用反证法. 设存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $z(x_0)>y(x_0)$. 令 $M=\{x\in[a,b]\mid z(x)>y(x)\}$, 则 M 为 $[a,b]$ 的非空开子集. (5分)

故存在开区间 $(\alpha,\beta)\subset M$ 满足

$$y(\alpha)=z(\alpha),\ z(x)>y(x),\ x\in(\alpha,\beta).$$

这推出 $z(x)-y(x)$ 单调不增. 故 $z(x)-y(x)\le z(a)-y(a)=0$. 矛盾. (15分)

六、 (复变函数 15 分) 设 $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ 是单位圆盘, 非常数函数 $f(z)$ 在 $\overline{D}$ 上解析, 且当 $|z|=1$ 时, $|f(z)|=1$. 求证 $f(D)=D$.

证明 因为当 $|z|=1$ 时, $|f(z)|=1$, 所以根据极大模原理, 在 D 上有 $|f(z)|<1$, 即, $f(D)\subset D$. (5分)

若存在 $a\in D$, 使得 $a\notin f(D)$, 则函数

$$g(z)=\frac{1-\bar{a}f(z)}{f(z)-a}$$

以及 $1/g(z)$ 在 D 上解析, 并且容易验证当 $|z|=1$ 时, $|g(z)|=1$. (10分)

因此根据极大模原理, 在 D 上有 $|g(z)|\leqslant 1$, $|1/g(z)|\leqslant 1$. 这说明在 D 上有 $|g(z)|=1$. 因为模为常数的解析函数是常数, 所以 $g(z)$ 在 D 上为常数, 从而 $f(z)$ 在 D 上为常数, 这与题设矛盾. 这就证明了 $f(D)=D$. (15分)

七、(实变函数 15 分) 设 E_k 是一列可测集， $f\in L_{(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k)}$.

1) 令 $A=\varlimsup\limits_{k\to\infty}E_k$, 证明 $\int_A f(x)dm=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k}f(x)dm$.

2) 令 $B=\varliminf\limits_{k\to\infty}E_k$, 证明 $\int_B f(x)dm=\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k}f(x)dm$.

3) 如果 $\{E_k\}$ 是单调的, 求证: $\lim\limits_{k\to\infty}E_k=E$ 存在, 且有

$$\int_E f(x)dm=\lim_{k\to\infty}\int_{E_k}f(x)dm.$$

证明 1) $A=\varlimsup_{k\to\infty}E_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$,

其中 $F_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k$, 则 $F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset F_{n+1}\supset\cdots$, (2分)

$\because f\in L_{\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k}\Rightarrow f\in L_{F_n},\forall n\geqslant 1\Rightarrow f\in L_A$.

令

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & x\in F_n\\ 0, & x\notin F_n.\end{cases}$$

i) $f_n(x)$ 可测，$\forall n\geq 1$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\chi_A(x),x\in\mathbb{R}$;

$\forall x\in\mathbb{R}$, 若 $x\in A$, 则 $f(x)\chi_A(x)=f(x)$，又 $x\in A=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n,\forall n\geq 1,f_n(x)=f(x)$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\chi_A(x)$. 若 $x\notin A,f(x)\chi_A(x)=0$,而 $x\notin A=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n,\exists n_0,x\notin F_{n_0},\{F_n\}\downarrow$, $\forall n\geq n_0,x\notin F_n,f_n(x)=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\chi_A(x)$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\chi_A(x)$.

iii) $|f_n(x)|\leq|f(x)|\chi_{F_1}(x),\forall n\geq 1$, 且 $|f(x)|\chi_{F_1}(x)\in L_{\mathbb{R}}$. (6分)

由控制收敛定理， $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)dm=\int_{\mathbb{R}}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)dm$.

即

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{\bigcup_{k=n}^{\infty}E_k}f(x)dm&=\lim_{n\to\infty}\int_{F_n}f(x)dm\\&=\int_{\mathbb{R}}f(x)\chi_A(x)dm\\&=\int_A f(x)dm.\end{aligned}$$ (7分)

2）$B=\varliminf\limits_{k\to\infty}E_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, 这里

$$F_n=\bigcap_{k=n}^{\infty}E_k,F_1\subset\cdots\subset F_n\subset F_{n+1}\subset\cdots,$$

$f\in L_{\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k}\Rightarrow f\in L_{F_n},\forall n\geq 1\Rightarrow f\in L_B$. (2分)

令

$$f_n(x)=\begin{cases}f(x), & x\in F_n\\ 0, & x\notin F_n.\end{cases}$$

i) $f_n(x)$ 可测，$\forall n \geq 1$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_(x), x \in B$;

iii) $|f_n(x)| \leq |f(x)|, x \in B$.

由控制收敛定理, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_B f_n(x)dm = \int_B f(x)dm$.

即

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{\bigcap_{k=n}^{\infty} E_k} f(x)dm &= \lim_{n\to\infty} \int_{F_n} f(x)dm \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_B f_n(x)dm \\
&= \int_B f(x)dm.
\end{aligned}
$$

(6分)

3) 若 $\{E_k\} \uparrow \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} E_k = \overline{\lim}_{k\to\infty} E_k = \underline{\lim}_{k\to\infty} E_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E$.

由 2) $F_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k = E_n$,

$$
\int_E f(x)dm = \lim_{n\to\infty} \int_{F_n} f(x)dm = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)dm.
$$

(1分)

若 $\{E_k\} \downarrow \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} E_k = \overline{\lim}_{k\to\infty} E_k = \underline{\lim}_{k\to\infty} E_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = E$.

由 1) $F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k = E_n$,

$$
\int_E f(x)dm = \lim_{n\to\infty} \int_{F_n} f(x)dm = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)dm.
$$

(2分)

八、 (微分几何 15 分) 设 Γ 是三维欧氏空间中一张平面上的一条抛物线, ℓ 是 Γ 的准线. 将 Γ 绕其准线 ℓ 旋转一周, 得到旋转面 S. 求 S 的两个主曲率的比值.

证明: 在空间选取坐标系，使得准线 ℓ 为 $z-$ 轴，抛物线 Γ 落在 Oxz 平面上, 且抛物线顶点为 $P=(p,0,0)$, 焦点为 $F=(2p,0,0)$. 由于抛物线上的任意点 $X=(x,0,z)$ 满足 $|XF|=x$, 我们得到 $(x-2p)^2+z^2=x^2$. 故抛物线方程为

$$x=p+\frac{1}{4p}z^2. \qquad (5分)$$

我们记 $f(z)=p+\frac{1}{4p}z^2$, 这时旋转面 S 的方程可表成

$$\gamma=\gamma(z,\theta)=(f(z)\cos\theta, f(z)\sin\theta, z),\ \ \theta\in[0,2\pi], z\in\mathrm{R}.$$

$$\gamma_\theta=(-f(z)\sin\theta, f(z)\cos\theta,0);$$

$$\gamma_z=(f'(z)\cos\theta, f'(z)\sin\theta,1);$$

则 S 的单位法向量为

$$n=\frac{1}{\sqrt{f'(z)^2+1}}(\cos\theta,\sin\theta,-f'(z));$$

$$\gamma_{\theta\theta}=(-f(z)\cos\theta,-f(z)\sin\theta,0);$$

$$\gamma_{\theta z}=(-f'(z)\sin\theta, f'(z)\cos\theta,0);$$

$$\gamma_{zz}=(f''(z)\cos\theta, f''(z)\sin\theta,0).$$

于是, 旋转面的第一基本形式 $I=Ed\theta^2+2Fd\theta dz+Gdz^2$ 和第二基本形式 $II=Ld\theta^2+2Md\theta dz+Ndz^2$ 为:

$$E=f(z)^2,\ \ F=0,\ \ G=f'(z)^2+1;$$

$$L=-\frac{f(z)}{\sqrt{f'(z)^2+1}},\ \ M=0,\ \ N=\frac{f''(z)}{\sqrt{f'(z)^2+1}}. \qquad (10分)$$

因为 $k_1=L/E, k_2=N/G$, 我们得到

$$k_1/k_2=LG/EN=-\frac{f'(z)^2+1}{f(z)f''(z)}=-2. \qquad (15分)$$

注：根据 k_1 和 k_2 的不同排序, 也可以 $k_1/k_2=-1/2$.

九、(概率统计 15 分) 一只盒子中装有标上 1 至N 的 N 张票券, 有放回地一张一张地抽取, 若我们想收集 r 张不同的票券, 则要期望抽多少次才能得到它们? 当然假设取得每张票券是等可能的, 各次抽取是独立的.

解 这个问题可以看作是一种等待时间问题. 我们等待第 r 张新票券出现. 以 $\xi_1, \xi_2, \cdots$ 依次表示对一张新票券的等待时间. 因为第一次抽到的总是新的, 所以 $\xi_1 = 1$. 于是 ξ_2 就是抽到任一张不同于第一次抽出的那张票券的等待时间. 由于这次抽时仍有 N 张票券, 但新的只有 $N-1$ 张, 因此成功的概率为 $p = \frac{N-1}{N}$. 于是, ξ_2 的分布列为

$$P(\xi_2 = n) = \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{N}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

从而

$$E\xi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(1-\frac{1}{N}\right)\left(\frac{1}{N}\right)^{n-1} = \left(1-\frac{1}{N}\right)\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^2} = \frac{N}{N-1}.$$

(4分).

在收集到这两张不同的票券之后, 对第三张新票券的等待时间其成功的概率为 $p = \frac{N-2}{N}$. 因此

$$E\xi_3 = \frac{N}{N-2}.$$

依此类推. 对 $1 \leqslant r \leqslant N$, 我们得到

$$\begin{aligned} E(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_r) &= \frac{N}{N} + \frac{N}{N-1} + \cdots + \frac{N}{N-r+1} \\ &= N\left(\frac{1}{N-r+1} + \cdots + \frac{1}{N}\right). \end{aligned} \qquad (8分)$$

特别, 若 $r = N$ 时, 则

$$E(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_N) = N\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}\right).$$

若 N 是偶数, $r = \frac{N}{2}$ 时, 则

$$E(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{\frac{N}{2}}) = N\left(\frac{1}{\frac{N}{2}+1} + \cdots + \frac{1}{N}\right). \qquad (12分)$$

由欧拉公式 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} = \ln N + C + \varepsilon_N$, 其中 C 是欧拉常数, ε_N 为 N 趋于无穷时的无穷小量. 由于

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\ln N}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}\right) = 1.$$

于是, 当 N 充分大时, 我们可得近似公式 $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} \approx \ln N$. 因而

$$E(\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_N) = N\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}\right) \approx N\ln N.$$

$$
\begin{aligned}
E(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{\frac{N}{2}}) &= N\left(\frac{1}{\frac{N}{2}+1}+\cdots+\frac{1}{N}\right) \\
&= 2r\left(\frac{1}{r+1}+\cdots+\frac{1}{2r}+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r}\right) \\
&\quad -2r\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{r}\right) \\
&\approx 2r\ln 2r-2r\ln r=N\ln 2,
\end{aligned}
$$

即

$$
E(\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_{\frac{N}{2}}) \approx N\ln 2 \approx 0.69315N. \qquad (15分)
$$

这说明如果只要收集一半票券, 或只要稍多于票半数的抽取次数即可.

十、(抽象代数 15 分) 设群 $G=AB$, 其中 A, B 均为 G 的 Abel 子群, 且 $AB=BA$. $\forall g_1,g_2\in G$, 用 $[g_1,g_2]$ 表示换位子, 即, $[g_1,g_2]=g_1g_2g_1^{-1}g_2^{-1}$, G' 表示 G 的换位子群 (即由 G 的换位子所生成的子群). 证明:

(*a*) $\forall a,x\in A, \forall b,y\in B$ 有下式成立:

$$[x^{-1},y^{-1}][a,b][x^{-1},y^{-1}]^{-1}=[a,b].$$

(*b*) G' 为 Abel 群.

证明: (a). 在 (a) 的条件下, 要证明 $[x^{-1},y^{-1}][a,b][x^{-1},y^{-1}]^{-1}=[a,b]$, 即要证明 $x^{-1}y^{-1}xyaba^{-1}b^{-1}y^{-1}x^{-1}yx=aba^{-1}b^{-1}$.

由已知 $AB=BA$ 可得: 存在 A 中的元素 a^*, x^*, B 中的元素 b^*, y^* 使得

$$ya=a^*y^*,\quad xb=b^*x^*.$$

于是有

(1) $yaba^{-1}b^{-1}y^{-1}=a^*y^*ba^{-1}b^{-1}y^{-1}$ (由 $ya=a^*y^*$)

$=a^*by^*a^{-1}b^{-1}y^{-1}$

$=a^*ba^{*-1}yb^{-1}y^{-1}$ (由 $y^*a^{-1}=a^{*-1}y$)

$=a^*ba^{*-1}b^{-1}=[a^*,b]$. (5分)

(2) 类似可证:

$$x[a^*,b]x^{-1}=[a^*,b^*],$$
$$y^{-1}[a^*,b^*]y=[a,b^*],$$
$$x^{-1}[a,b^*]x=[a,b].$$

如所需. (*a*) 获证. (10分)

(b). 任取 G 的一个换位子 $[a_1b_1,b_2a_2]$, $a_i\in A$, $b_i\in B$, $i=1,2$. 有

$[a_1b_1,b_2a_2]=a_1b_1b_2a_2b_1^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1}$

$=a_1b_1\underbrace{a_1^{-1}b_1^{-1}}\underbrace{b_1a_1}b_2a_2b_1^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1}$

$=[a_1,b_1]b_1a_1b_2\underbrace{a_1^{-1}b_2^{-1}b_2a_1}a_2b_1^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1}$

$=[a_1,b_1]b_1a_1b_2a_1^{-1}b_2^{-1}\underbrace{b_1^{-1}b_1}b_2a_1a_2b_1^{-1}a_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1}$

$=[a_1,b_1][a_1^*,b_2]\underbrace{b_1b_2a_1a_2b_1^{-1}}a_1^{-1}a_2^{-1}b_2^{-1}$

$=[a_1,b_1][a_1^*,b_2]\underbrace{b_1b_2a_1a_2b_1^{-1}a_2^{-1}a_1^{-1}b_1b_1^{-1}b_2^{-1}}$

$=[a_1,b_1][a_1^*,b_2][(a_1a_2)^*,b_1^{-1}]$, 其中 $(a_1a_2)^*$ 为 A 中的某元.

这样, $G'=<\{[a,b]:a\in A,b\in B\}>$, 从而由 (a) 可知, G' 为 Abel 群. (15分)

十一、(数值分析 15 分) 给定多项式序列

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x,$$
$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\ n = 1, 2, \cdots$$

求证: (1) 当 $x \in [-1, 1]$ 时, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

(2) 设 $C[-1, 1]$ 是区间 $[-1, 1]$ 上连续函数构成的内积空间, 其中内积定义为

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

则 $T_n(x)$ 是该内积空间的正交多项式, 即当 $n \neq m$ 时 $\langle T_n(x), T_m(x)\rangle = 0$.

(3) 设 $P(x)$ 是次数为 n 的首项系数为 1 的多项式. 求证:

$$||P(x)||_\infty \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$$

且等号成立当且仅当 $P(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$, 这里 $||P(x)||_\infty = \max\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)|$.

证明

(1) 用归纳法. 当 $n = 0, 1$ 时, 结论显然. 设 $n \leqslant k$ 时, $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. 当 $n = k + 1$ 时, 令 $x = \cos(\theta)$, 则

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) &= 2\cos(\theta)\cos(k\theta) - cos((k-1)\theta) \\ &= \cos((k+1)\theta) = \cos((k+1)\arccos(x)) \end{aligned}$$

(4 分)

(2)

$$\langle T_n(x), T_m(x)\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

令 $x = \cos(\theta)$, 上述积分化为

$$\int_{\pi}^{0} \frac{\cos(n\theta)\cos(m\theta)}{\sin(\theta)} d(\cos(\theta)) = \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)d\theta$$

当 $n \neq m$ 时, 上述积分为零. (8 分)

(3) 注意以下事实: $T_n(x)$ 是首项系数为 2^{n-1} 的 n 次多项式, $||T_n(x)||_\infty = 1$, 且 $T_n(x)$ 在 $x_k = \cos(\frac{k\pi}{n})$ 处达到极值, 即 $T_n(x_k) = (-1)^k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. 现假设 $||p(x)||_\infty < \frac{1}{2^{n-1}}$. 考虑函数 $q(x) = p(x) - \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$. 则 $q(x)$ 在 x_k 处的符号与 $T_n(x)$ 在 x_k 处的符号相反, 即为 $(-1)^{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. 于是 $q(x)$ 至少有 n 个零点. 但是 $q(x)$ 次数小于 n, 这是不过能的! 因此, $||p(x)||_\infty \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$. (13 分)

当 $||p(x)||_\infty = \frac{1}{2^{n-1}}$ 时, 可证 $q(z)$ 至少有 n 个零点, 从而 $q(x) \equiv 0$, 即 $p(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_{n-1}(x)$. (15 分)