

学习代数几何的建议

袁新意 (2026.4.30 v2.2)

代数几何 (GTM52 层次) 是很多代数方向的学生需要克服的一个超级难关, 学习它需要很强的动机、决心和毅力。在这篇文章中, 我们将简要地介绍学习代数几何的基本流程与注意事项。我们将用数字 1-5 表示我们将遇到的每本书或部分章节的难度系数 (Difficulty Level), 其中 (DL: 1) 表示最容易, 而 (DL: 5) 表示最困难。注意到这些难度系数已假设你熟悉相关的预备知识, 并且不同的人对于不同的内容的难度感知是有差别的, 所以它们只是给你一个模糊的心理预期。

因我能力和精力有限, 本文难免有疏漏之处。另外, 我非常感谢同行们和学生们提出了诸多宝贵的建议, 我同时非常感谢刘春晖和刘星宇对本文的校对工作。

1. 预备知识

在你学习了数学分析、高等代数、抽象代数、复变函数、点集拓扑之后, 还需要下列预备知识。

(1) **交换代数**。这是学习代数几何的唯一的绝对必要的预备知识。推荐教材:

(a) Altman, Kleiman, A Term of Commutative Algebra. (DL: 2)

(b) Atiyah, MacDonald, Introduction to Commutative Algebra. (DL: 2)

这两本书内容的差别不大, 都是交换代数的入门教材。Atiyah-MacDonald 的书是历史上的经典, 而 Altman-Kleiman 的书 (网上可以搜索电子版) 在细节上打磨的更好。建议细读 Altman-Kleiman, 熟悉每个定义和定理, 逐个做习题 (努力思考, 不要急着看答案), 而 Atiyah-MacDonald 可以提供补充的习题。交换代数的进阶教材:

(c) Matsumura, Commutative Algebra. (DL: 3)

这本书适合在读代数几何的时候交叉翻阅, 书中有很多内容在代数几何里会用到, 但是没有代数几何背景读这本书会很艰难。

(2) **同调代数**。如果你知道一点同调代数, 那么你读 GTM52 第 3 章会顺利不少, 但这个不是绝对必要的, 是后期可以补读的。推荐教材:

Weibel, An Introduction to Homological Algebra.

建议阅读前四章 (DL: 3), 忽略后面的章节。阅读的目的是理解同调代数的基本机制, 读完后记得主要内容即可, 不必像读交换代数那么仔细。

(3) **代数拓扑中的同调**。虽然这不是绝对必要的预备知识, 但它依然会让你读 GTM52 第 3 章更顺利, 而且对你增加数学的修养和视野大有益处。推荐教材:

Hatcher, Algebraic Topology.

建议阅读第 0-3 章 (DL: 3), 对掌握程度的要求类似于 (2)。

(4) **微分流形和黎曼面**。概形的定义受了微分流形和黎曼面的启发, 所以你需要知道它们的定义和基本性质。关于微分流形, 推荐教材:

Tu, An Introduction to Manifolds.

建议阅读前 5 章 (DL: 3), 但是第 4 章可以跳过, 主要目的是领悟微分流形、切空间、微分形式的定义。微分流形的概念, 其旷世的思想主要来自黎曼, 是现代大部分几何学的基础。

关于黎曼面, 推荐教材:

Griffiths, Introduction to Algebraic Curves.

本书同时讲了黎曼面和复代数曲线, 基本是一维的复代数几何的内容, 其内容也会帮助你理解 GTM52 的第 4 章。建议阅读前四章 (DL: 2), 领悟主要思想即可。

(5) **经典代数几何**。学习经典的代数簇, 预备知识是基本的交换代数, 推荐教材:

Fulton, Algebraic Curves (DL: 1).

建议阅读全书, 记住主要的定义和定理, 不用太在意细节。后面的阅读可能会重复部分内容, 而概形的语言会刷新这里的所有内容。

2. 代数几何

有了上面的预备知识, 你可以开始学习代数几何了。

代数几何的圣经是 Grothendieck 和 Dieudonné 著的 EGA (Éléments de Géométrie Algébrique), 分 4 章, 共 8 本, 大约 1800 页。因篇幅长度和法语问题, 我们通常不把 EGA 作为仔细学习的教材, 但是做研究时这是非常好的参考书。

另一个庞大的代数几何知识库是 Stacks project (<https://stacks.math.columbia.edu/>)。这个也不适合做教材, 而适合在学习或研究时, 查找你想了解的相关内容。可以用 bing 或 google 搜索 “Stacks Project” 和数学名词, 或者用 AI 做类似的搜索。

比较适合初学者的代数几何教材有：

(a) Hartshorne, Algebraic Geometry. (DL: 5)

(b) Vakil, The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry. (DL: 4)

(c) Görtz, Wedhorn, Algebraic Geometry I, II. (DL: 5)

Hartshorne 的书就是通常的 GTM52，是历史上的经典，依然是当前最流行的教材。全书大约 500 页，核心内容 (2-3 章) 共 230 页，风格为超级浓缩。因为过于浓缩，大量的弦外之音需自己领悟，甚至大量的重要知识被藏在习题中，阅读本书的难度很大。因为这本书的年代非常早，篇幅非常短，很多细节的处理和取舍不够合理，后面我会提到。

Vakil 的书 800 多页，讲解耐心，跳跃很小，学习难度远低于 Hartshorne。本书将习题嵌入正文之中，更容易启发读者思考。但是本书内容的深度不如 Hartshorne，关于上同调的内容也不够丰富，习题也偏简单。

Görtz-Wedhorn 的书两本共约 1500 页，第一本讲概形，第二本讲上同调，分别对应 Hartshorne 的第 2 章和第 3 章。这两本书讲解耐心，跳跃较小，内容上兼具深度与广度。与 Hartshorne 相比，这两本书覆盖的内容已翻倍，叙事也更彻底，细节打磨也更到位，当然这些得益于其篇幅足够长。事实上，这两本书包含了 EGA 的大部分内容，还包含了很多更高阶的内容。作为入门教材，这两本的缺点当然是篇幅太长。作为进阶教材和参考资料，这两本书将非常出色。

建议采用以下阅读方式之一：

(1) 读 Hartshorne。

(2) 先读 Vakil，再读 Hartshorne。

(3) 读 Görtz-Wedhorn 的两本。

如果只读 Vakil，知识面和训练的强度还是不够。所以，第 2 种方式是第 1 种的循序渐进版。如果你有时间和耐心，可以尝试第 3 种方式，回报也会更大。Hartshorne 和 Görtz-Wedhorn 的第一章讲代数簇，但是 Vakil 没有代数簇。所以，如果你首先读 Vakil，在此之前需要读 Fulton 的代数曲线。

不管是哪种方式，都应该做习题。Hartshorne 和 Görtz-Wedhorn 都有大量的习题。每读完一节正文，都要把后面的习题都做一遍，像写作业一样把答案详细的写到本子上。做习题的目的，不是为了提高解题能力，而是通过反复的思考与耐心的书写，强迫自己熟悉这套语言，习惯这套机制，形成自己在代数几何上的常识甚至直觉。把答案写到本子上，也是对自己的一种鞭策与激励。在写完一个本子后，可以感受自己的成就感。以下几点值得注意：

- (1) 有些习题很难，你可能做不出来，这很正常。每个题尽量思考一个小时以上，如果依然没有思路再跳过。
- (2) 很多习题是有历史背景的，其背后有很丰富的数学，通常在网上可以搜到。但是，不要花过多的时间（或不要花时间）去搜索和阅读。因为做习题的目的，不是为了学习更多的知识，而是为了激发你思考和书写，强化你之前学过的内容。
- (3) 在念了 Fulton 的书之后，Hartshorne 的第 1 章可以快进，习题也可以跳过。但是，Hartshorne 的第 4-5 章很重要，不要省略，应该完成大部分习题。这两章教你怎样落地，即怎样把前两章的抽象理论用到我们真正关心的代数簇上，帮助我们理解前面的语言，建立正确的直觉与品味，而不是盲目的在学了这门抽象语言后迷失在下一门更抽象的语言中。
- (4) 如果有代数几何课，边上课边读书做题，对你的帮助会很大。注意，单纯的听课，即使花两学期，这付出也是远远不够的。如果有同学一起学习，经常讨论一下，不仅能帮助自己熟悉与理解，也可以在心理上相互鼓励。

如果专注于读 Hartshorne, 注意以下几个细节。

- (1) 该书的 valuative criterion (II, Thm 4.3, 4.7) 显得非常突兀，你可以先无条件接受，然后继续往下读，以后可能会自动消化。事实上，我第一次读这本书时，就被这个地方劝退了。第二次读的时候，老师指点我说，这背后的直觉是， $T = \text{Spec } R$ 有两个点，其广点 (generic point) U 的极限是其特殊点 (special point) s 。要求 U 到 X 的映射唯一延拓到 T ，相当于要求 U 在 X 中的极限点（即 s 的像）唯一，类似于拓扑中的 Hausdorff 条件。

- (2) 该书的 formal scheme 讲得不自然。初学者不必太在意这一节，因为在本阶段基本用不上，事实上另两本教材索性就没有讲这个。如果你实在想学，或后期确实需要学，可以读 EGA I 的第 10 节。
- (3) 该书的 smooth morphism 处理得草率，甚至把 étale morphism 下放到了习题里。你可以对照着看 Vakil 的相关内容，Vakil 把这些内容分散到多个章节，这个可以查目录。另外，你也可以读 Görtz-Wedhorn II 的第 18 章，那里甚至讲了更多的内容。
- (4) 该书没有专门讲 Cohen-Macaulay 这一重要概念，你可以看 Vakil 第 26 章补上相关内容。
- (5) 谱序列是计算同调的强力工具，但是初学代数几何时用不上，所以 Hartshorne 没有讲。如果你确实想学，或者以后需要学，可以读 Vakil 或 Görtz-Wedhorn II 相关的部分。Görtz-Wedhorn II 处理得更详细，可以先读附录 F 里的 Spectral Sequences 那一节（对应 Weibel 的第 5 章），然后读正文的相关部分，主要集中在 21-22 章。更广泛的是，Görtz-Wedhorn II 对上同调的处理基于 derived category 的观点，比 Hartshorne 基于 sheaf 的语言处理得更自然更彻底，但其抽象程度也倍增。我的建议是，作为初学者，如果你选择了读 Hartshorne，就暂时不要纠结这个，如果以后需要可以再补读。

3. 其它内容

学代数几何时，学习下列相关的数论课程，对学代数几何有帮助。

- (a) **代数数论**。推荐 Neukirch (1-2 章) 或者 Milne 的教材，书名都叫 Algebraic Number Theory. 难度 (DL: 2). 预备知识是基本的交换代数，学习的过程会加深对交换代数和代数曲线的理解。
- (b) **椭圆曲线的算术**。推荐 Silverman 的书 The Arithmetic of Elliptic Curves 的 3-8 章，或者 Milne 的书 Elliptic Curves。难度 (DL: 2)。学习的过程会加深对代数几何的理解。预备知识是交换代数和代数数论，如果读过 Fulton 的代数曲线更好。

下列内容，要用到代数几何的语言，在对 GTM52 有大致的掌握后可以学习，并且对理解 GTM52 的内容有促进作用。

- (a) **环簇**。推荐 Fulton 的 Introduction to Toric Varieties, 其机制是通过一些简单的组合数据构造一类代数簇. 难度 (DL: 1).
- (b) **阿贝尔簇**。推荐 Mumford 或 Milne 的教材, 书名都叫 Abelian Varieties. 不熟悉代数几何时的难度 (DL: 4). 另外, Görtz-Wedhorn II 第 27 章讲了 abelian scheme, 难度 (DL: 5).
- (c) **模空间**。模空间的种类很多, 没有一个全面的教材, 但是 Görtz-Wedhorn I 的第 8 章是个非常友好的介绍。在 Görtz-Wedhorn I 全书搜索“representable”, 会找到很多其它的例子。难度 (DL: 5).
- (d) **相交论**。常用参考书是 Fulton 的 Intersection Theory, 但是本书很硬核, 构造相交论的方式强大而缺乏直觉, 对初学者不友好。要大致的了解相交论, 可以阅读 GTM52 的附录 A。如果想要严格的了解, 之后再读 Fulton, 难度 (DL: 4).

上述内容, 在你学过 GTM52 层次的代数几何, 但是不熟练的情况下, 还是可以同时学的, 并且还可能帮助你理解代数几何, 当然你学习的时候需要回头翻代数几何。但是, 下述内容, 在你不熟练 GTM52 层次的代数几何时, 请不要在它们上浪费时间。

(a) Étale Cohomology.

(b) Perverse Sheaves.

(c) Algebraic Stacks.

这些内容太抽象, 在代数几何不熟练的情况下学习它们, 不仅不会帮助你巩固代数几何的基础, 反而可能会将你的代数几何框架变成空中楼阁, 把你变成一个名词党。如果你在 4 年内, 从数分高代开始学习, 完成了这三样内容中的至少一样, 那么你需要警醒自己是否成了名词党。

当然, Étale 上同调的机制和意义比另两项具体, 用途也更广泛, 要大致的了解其基本机制和对 Weil 猜想的作用, 可以阅读 Hartshorne 的附录 C, 这个很容易。网上也能搜索到很多出色的相关介绍。

学生初见 Grothendieck 的代数几何语言与风格, 容易陷入越抽象越重要、越理论越正统、越统一越终极的错觉中。事实上, 这门理论能成为我们很多前沿方向的标准语言, 不是因为其抽象性带来的虚假的优越性, 而是它用恰到好处的抽象语言涵盖了

很多我们真正关心的问题、例子、现象，给我们提供了方便的理论框架和推演工具。数学的发展，终究是基于问题导向或实用导向的，而非理论导向或抽象导向的。

平行于以交换代数为基础的代数几何，数学里还有以复变函数为基础的复代数几何。要快速了解两个语言的关联，可以阅读 Hartshorne 的附录 B。推荐复代数几何的教材：

(a) Griffiths, Harris, Principles of Algebraic Geometry. (DL: 3)

(b) Voisin, Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I, II. (DL: 3)

建议仔细阅读 Griffiths-Harris 第 0-1 章，或者几乎等价的 Voisin 第一本的第 1-2 章，增加数学修养和视野。Griffiths-Harris 后面的章节可以快速的浏览，让我们发现两种不同的语言居然可以做出如此类似的结果。

4. 后续

即使在没有老师引导的情况下，你也可以按以上机制自学 GTM52 层次的代数几何。等你学完了这个之后，接下来应该学什么或者做什么，非常依赖于你感兴趣的研究方向，因为后面的内容可能会分化到更专门的方向。这时，你一定要找该方向的老师（或导师）帮你做学习计划或研究计划。沿着合理的计划，你再学少量的东西就可以看懂一些前沿的结果，离自己做研究已经不远了。即使你不知道自己的兴趣，也需要找各方向的老师发掘自己的兴趣。在这个阶段，漫无目的的学习，可能会让你把时间浪费在一些不重要的东西上，而且可能会耽误你进入研究阶段的时机。